LOS NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS EN LA MATEMÁTICA MODERNA Y LA MATEMÁTICA ACTUAL.

Luis Fernando Giraldo Osorio

Código: 200933234

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali, 2014

LOS NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS EN LA MATEMÁTICA MODERNA Y LA MATEMÁTICA ACTUAL.

Luis Fernando Giraldo Osorio

Código: 200933234

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Educación Básica Con Énfasis en Matemáticas

Directora

Mg. Mónica Andrea Aponte.

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

AGRADECIMIENTOS

Dedicado a Dios, quien me ilumina y llena de sabiduría, a mi madre que con su apoyo y amor estuvo siempre brindándome lo mejor para llegar a cumplir este logro , a mi hermano y mis tíos por su gran colaboración, a mis compañeros y amigos que estuvieron conmigo en este trayecto, a Mónica Aponte por sus enseñanzas y gran disposición, a Ángela Gómez por brindarme su apoyo y guiarme en el conocimiento, y a todos mis maestros, que con su comprensión y ejemplo a seguir, me han permitido alcanzar esta meta.

Luis Fernando Giraldo Osorio

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad del Valle

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	*LOS NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS EN LA MATEMÁTICA MODERNA Y LA MATEMÁTICA ACTUAL.*							
Se trata de:	*Proyecto* [ ]			*Informe Final* [X]				
Director:	*Monica Andrea Aponte*							
1er Evaluador:	*Angela Gómez*							
2do Evaluador:	*Maribel Anacona*							
Fecha y Hora	*Año:*	*2014*	*Mes:*	*10*	*Día:*	*02*	*Hora:*	*4:30 pm*

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
LUIS FERNANDO GIRALDO OSORIO	0933234	*3469*

Evaluación

Aprobado	[ ]	*Meritorio*	[ ]	*Laureado*	X
Aprobado con recomendaciones	[ ]	*No Aprobado*	[ ]	*Incompleto*	[ ]

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* __________________ *(máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo	[ ]	*1er Evaluador*	[ ]	*2do Evaluador*	[ ]

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de* __________________ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Observaciones:		*Recomendaciones:*		*Razón del Desacuerdo – Alternativas:*	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Evaluación general:

Los evaluadores consideran de manera unánime que la propuesta muestra una novedosa articulación entre el estudio histórico-epistemológico y el didáctico, en particular alrededor del análisis de textos en el campo de la Educación Matemática.

Se resalta como innovador la adecuación, realizada por el estudiante, de una rejilla de análisis a partir del modelo de Análisis de Contenido en la propuesta de Rico, L., Marín, A., Lupiañez, J., y Gómez P. (2008). Esta adaptación se realizó desde un enfoque histórico-epistemológico centrado en el concepto de número entero, en dos épocas distintas como lo son la Reforma de las Matemáticas Modernas 1960-1980 y la época actual en Colombia 2003-2013.

El informe final presenta una escritura ágil, seria y coherente en términos de la problemática, los objetivos, la metodología, el análisis y las conclusiones; esto hace que el documento cumpla con todos los cánones de calidad y rigor que exige un trabajo de este nivel de formación.

La temática abordada es crucial como campo problema tanto en la Educación Matemática como en la Historia de las Matemáticas. La metodología desarrollada evidencia una interrelación fructífera entre estos campos del conocimiento. Por esta razón se considera que el trabajo se constituye en un referente para los docentes y en un aporte valioso a la Educación Matemática.

*De manera unánime los profesores, miembros del jurado evaluador, **aprueban** el trabajo de grado y recomiendan la **Mención de Laureada.***

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

Tabla de Contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de esquemas

RESUMEN

Las posibles dificultades históricas por las que se vió enfrentado el concepto de número entero negativo, en cuanto a su concepción, el carácter epistemológico y la necesidad de su aprobación como objeto matemático existente, generó gran controversia por parte de expertos en el campo de la Matemática, y más aún en la Educación Matemática. De esta manera, se realizaró una aproximación histórica y epistemológica a los procesos de construcción por los que tuvo que atravesar el concepto de número entero negativo, identificando el carácter histórico y epistemológico de éste, a través del análisis de dos libros de texto en los periodos de la Reforma de la Matemática Moderna y de la Matemática actual.

En este sentido, surge la cuestionable tarea de abordar, en lo posible, la relación o la integración de este concepto en los libros de texto, por medio del análisis de los mismos, es decir, la manera en que es presentado en dos épocas específicas: la época de la Reforma de la Matemática Moderna en contraste con la Matemática actual, con la intención de poder encontrar la relación de los obstáculos epistemológicos y su manifestación a través de los libros de texto.

En este trabajo de grado se logró dar cuenta de la difícil aceptación y surgimiento de los números enteros negativos y cómo es su presentación en los libros de texto en la época de la Reforma de la Matemática Moderna y de la Matemática actual, presentando las variaciones que se generan en las reformas educativas.

Palabras claves

Números enteros negativos, obstáculos históricos y epistemológicos, análisis de textos, Matemática Moderna, Educación Matemática

0. INTRODUCCIÓN

No hay dudas en que la matemática es una ciencia formal que estudia, entre otras cosas, las relaciones numéricas, las figuras geométricas y patrones que, desde el comienzo se han creado con un fin práctico. La falta de comprensión y relación de esta ciencia con la realidad física, es un aspecto que ha generado cuestionamientos por parte de la comunidad de matemáticos, y por qué no , docentes y estudiantes. Quizá todo sea porque gran parte de los objetos matemáticos pertenecen a hechos netamente matemáticos, pero para la comunidad educativa es importante la articulación de esta ciencia en aspectos de la vida que favoreven la comprensión de la realidad.

Uno de los objetos matemáticos que está inundado de polémicas es el de número negativo. En la escuela, este concepto es de difícil aceptación por parte de los estudiantes, al parecer por la falta de comprensión de éste en la realidad cotidiana y en un contexto que tenga utilidad, pues muchos maestros se quedan proporcionando la definición a partir de la recta numérica, como si la única fuente de ampliar el concepto estuviera ligado a este tipo de representación.

Una de las falencias es que los docentes desconocen aspectos de tipo histórico y epistemológico que giran en torno ante cualquier concepto matemático, además los libros de texto utilizados para el proceso de enseñanza y aprendizaje, en algunas ocasiones no contextualizan el concepto de acuerdo a la utilidad práctica que pueda propiciar el objeto matemático.

De acuerdo a lo anterior la tarea del docente está sujeta a no desconocer el proceso evolutivo y epistemológico de conceptos matemáticos y así mismo poder establecer criterios de selección de los libros de texto que utilizará en el aula de clase, para facilitar la comprensión y adquisición de saberes.

En este sentido este trabajo está inmerso en la línea de Historia de las Matemáticas, y tiene como propósito analizar los diferentes obstáculos epistemológicos asociados al concepto de número entero negativo, partiendo de un recorrido histórico de la difícil aceptación de este conjunto numérico como objeto matemático y de esta manera la presentación de éste en los libros de texto en dos épocas específicas: la Matemática Moderna y la Matemática actual, para lograr encontrar los posibles obstáculos asociados en los textos y las variaciones en la forma de presentar el concepto. También es objetivo de esta tesis reflexionar acerca de lo que se está enseñando y cómo se esta enseñando, para mejorar la práctica educativa.

Con respecto a lo anterior este trabajo se divide en cuatro capítulos, en el primero se presentan aspectos relacionados con la contextualización de la problemática que es objeto de estudio, presentando además la pertinencia de los estudios históricos y epistemológicos y la pertinencia de los análisis de texto en la Educación Matemática.

En el capítulo 2, se presentan los aspectos relacionados con la dimensión histórica, epistemológica y matemática del concepto de número entero negativo, presentando un recorrido histórico acerca de los sistemas de numeración y la forma en que se concebía el número en la antigüedad, posteriormente se presentan algunos obstáculos epistemológicos asociados al concepto y seguidamante se muestra el concepto de número entero negativo bajo la construcción formal de este conjunto numérico como clases de equivalencia.

En el capítulo 3 se exponen los aspectos relacionados con el movimiento de las Matemáticas Modernas en Colombia, un modelo para análisis de texto y los criterios y la presentación de los libros de texto de las Matemáticas Modernas y la Matemática actual.

El capítulo 4 está dedicado al análisis de los textos seleccionados, considerando todos los aspectos históricos, epistemológicos y matemáticos que giran en torno al concepto de número entero negativo, partiendo del análisis de contenido y la rejilla como propuesta para analizar los libros de texto.

CAPÍTULO 1

1. CONTEXTUALIZACIÓN AL TRABAJO DE GRADO

Es de interés particular lograr encontrar algunas perspectivas que surgen en relación al desarrollo histórico y epistemológico de algunos conceptos en matemáticas, en especial un concepto que ha sido fuente de múltiples investigaciones didácticas para dar cuenta de los errores y obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del concepto de número entero negativo.

Muchos docentes al realizar su planeación de acuerdo a una temática establecida, optan por usar algunas herramientas de apoyo para llevar a cabo su proceso de conceptualización, ejemplificación de conceptos, actividades, preparación de talleres, entre otros usos que el docente puede encontrar en un libro de texto, como material de apoyo para la realización y ejecución de sus clases.

Sin embargo, son muchos los libros de texto que el docente puede emplear al momento de llevar a cabo su planeación, pero en ocasiones se descuidan aspectos referentes a la historia y epistemología que enmarcan un concepto.

En este sentido, este trabajo de grado se encarga de dar cuenta de la importancia de tener en cuenta los estudios histórico-epistemológicos del concepto de número entero negativo, bajo la mirada de análisis de textos de dos periodos establecidos: la época de la matemática moderna y la reforma educativa que rige actualmente en nuestro país.

1.1 Planteamiento del problema

Desde la antigüedad se ha trabajado e involucrado el concepto de número natural en actividades cotidianas que realizaban las personas, en sus prácticas de comercio y en mediciones de tierra, pero con el pasar del tiempo, la matemática y dentro de ella los conceptos matemáticos, fueron evolucionando, a tal punto de encontrar un concepto de número que al parecer no era el concepto de número natural, sino un concepto más amplio en el que estarían contenidos otros objetos matemáticos como son los números enteros.

En la actualidad sigue siendo objeto de discusión el concepto de número entero negativo principalmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los números negativos, como una extensión del sistema de numeración, están vinculados de alguna manera en situaciones que requieren de su uso. Además el paso de los números naturales a los números enteros positivos y negativos con el cero como número entero, amplía el concepto de número, pero también se ve sujeto a cambios conceptuales en las operaciones, propiedades y relaciones entre ellos, configurando de esta manera un sistema numérico diferente.

Con respecto a lo anterior en la escuela, falta claridad en la relación del uso de estos números en el contexto cotidiano de los estudiantes, y más aún, del concepto como tal, de las propiedades y relaciones que este objeto matemático presenta. Por un lado, al utilizar un libro de texto se espera que el saber que se encuentra inmerso sea comprendido e interpretado por parte de los estudiantes, pues como lo afirman Prendes & Solano (2004) el libro de texto es un medio didáctico tradicionalmente utilizado en el sistema educativo. En este sentido, este medio no solo es utilizado por los estudiantes, también lo emplean los docentes, y por ende ellos deben ser cuidadosos en su selección, para evitar en lo posible y de manera parcial dificultades en el saber que se quiere enseñar.

Por otro lado, la historia de las matemáticas según Gonzalez P. (2004) favorece la comprensión de los problemas matemáticos a través de la intelección del proceso real de creación de los conceptos, del contexto en que aparecen, de las ideas que las propician y de las reformulaciones que sufren. De este modo es importante tener en consideración aspectos de tipo histórico que envolvieron, en este caso, la génesis del concepto de número entero negativo, y su relación o forma en que es presentado en los libros de texto, tomando como referencia las dificultades asociadas al concepto.

Como resultado de lo anterior, algunas investigaciones como la de Cid (2000), enfatiza en la existencia de los obstáculos en la historia de la constitución de los números negativos y la influencia en la enseñanza actual, partiendo de la noción de obstáculo epistemológico y proporcionando algunas de las posibles aportaciones que se pueden tomar en consideración al momento de enseñar este objeto matemático.

Múltiples investigaciones aportan de alguna manera al estudio de los números negativos entre ellas; Bruno (1997); Cid (2003); Gonzales et al (1999), quienes sustentan que este objeto matemático ha tenido problemáticas concernientes al proceso de enseñanza y aprendizaje. Una de estas problemáticas está relacionada con la falta de conocimiento del desarrollo histórico y epistemológico por el que tuvieron que atravesar los números enteros negativos y el proceso de desarrollo de éstos números hasta su consolidación como un ente formal dentro de las matemáticas.

De acuerdo a lo anterior en la escuela se presenta este concepto de número entero negativo como un objeto ya establecido, y que al parecer carece de dificultades en la enseñanza y aprendizaje, precisamente porque en algunas ocasiones los docentes desconocen la parte histórica, los obstáculos y todo el soporte teórico que se encuentra ligado en dichos números. En este sentido surge una problemática que gira en torno a las posibles dificultades históricas y epistemológicas que se encuentran inmersas en cuanto al concepto del número entero negativo presentes en los libros de texto:

¿Qué obstáculos históricos y epistemológicos asociados al concepto del número entero negativo, se pueden presentar en algunos libros de texto comprendidos durante el periodo de la matemática moderna (1960-1980) y la matemática actual (2003-2013) en la educación colombiana?.

1.2 Justificación a la problemática del trabajo

Como futuro docente es fundamental conocer y considerar aspectos históricos y epistemológicos ligados a conceptos elementales dentro de la formalización y caracterización de éstos, pues la historia está relacionada con las matemáticas, y más aún dentro del amplio campo de la Educación Matemática.

En el proceso de enseñanza, se requieren docentes en capacidad de fortalecer dicho proceso, tratando de vincular, relacionar y posiblemente lograr la integración de temáticas a través del análisis de textos como medio didáctico, que faciliten la interpretación de conceptos y uso de las matemáticas en la enseñanza de los estudiantes, sin descuidar la parte histórica y evolutiva de una ciencia tan importante como lo es la Matemática. No se trata de involucrar la historia como tal en las clases de matemáticas, por el contrario, lo que se quiere plantear es que los docentes deberían tener en consideración los aspectos históricos que se generaron a raíz de un concepto, para así mismo ser cuidadosos en el momento de presentarlos en sus clases.

De este modo, si un libro de texto es el punto de apoyo o sirve como soporte para un docente en aspectos que giran en torno a la realización y planeación de una clase de matemáticas, de formalización de conceptos y de una serie de actividades que se proponen para los estudiantes, es interesante que se analicen la manera cómo se encuentran o presentan estos conceptos que van a ser trabajados en la enseñanza, para tratar de evitar en lo posible, obstáculos en el aprendizaje.

Se pretende encontrar la forma en que se presenta el concepto de número entero negativo en los libros de texto en la época de la Reforma de la Matemática Moderna y la Matemática actual, y a partir del análisis histórico-epistemológico comparativo realizar un aporte a la enseñanza. Se trata de ver el modo de introducir el concepto de número entero negativo, a partir de la consideración del carácter histórico y epistemológico por el que atravesó este concepto, concepto que se ha dificultado en su interpretación por parte de los estudiantes. Así, la intención está sujeta a encontrar las falencias posibles que se encuentran en la concepción del entero negativo.

En muchas ocasiones el concepto es presentado de una manera formal, y ello conlleva, quizá, a que los estudiantes logren poca comprensión del uso de estos números en su contexto cotidiano, y presenten dificultades en el momento de operar con estos números. En este sentido, es importante tener una base que sustente o trate de encontrar algunas alternativas de introducir el concepto como tal.

Lo que se busca en esta investigación es presentar un aporte educativo a la comunidad docente, para tomar conciencia de lo que se enseña y cómo se enseña, cuando se toma como punto de apoyo un libro de texto, teniendo en cuenta las diferentes formas en la que se puede presentar el concepto de número entero negativo en los libros de texto de la época de la Reforma de la Matemática Moderna y la matemática actual.

1.2.1 Pertinencia de los estudios histórico- epistemológicos en la Educación Matemática.

Se reconoce por múltiples investigaciones la importancia de los estudios históricos y epistemológicos en la Educación Matemática, Freudenthal (1983), señalaba que aprender matemáticas significa «re-inventarla». En este sentido la historia permite una profundización de lo que se enseña y aprende. Podemos inferir entonces que quien reflexiona sobre el desarrollo de las matemáticas, debe necesariamente plantearse el problema de la historia de los conceptos, y más aun considerando que las matemáticas como construcción humana están ligadas al ámbito social y cultural que las produce, lo cual no debe desconocerse en el aula de clase.

Ahora bien, las matemáticas como ciencia, y vistas o no como una creación humana, están insertadas bajo una cultura y una historia, son en muchas ocasiones, una ciencia abstracta y formal para los estudiantes en la escuela. Desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares Básicos de

Competencias en Matemáticas (2006), se hace énfasis en partir de situaciones de aprendizaje significativas y comprensivas de las matemáticas, apuntando a que los contenidos matemáticos no sean evidentes en sí mismos, sino que tienen que ser interpretados activamente por los estudiantes, permitiendo recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos, consolidando los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático.

Sin embargo, otro elemento que genera comprensión de las matemáticas lo indica Anacona (2003) quien enfatiza en los aportes de la Historia de las Matemáticas en el campo de la Educación, relacionando el conocimiento matemático con otras formas de expresión de la cultura, tales como el arte y la filosofía. Tradicionalmente el trabajo histórico en torno al conocimiento científico se puede abordar de dos maneras: la primera es una internalista, la cual se basa en hacer una historia de los conceptos y la segunda, desde una corriente externalista, donde se consideran aspectos sobre acontecimientos científicos que se obtienen a partir del ámbito social, lo que respecta a la evolución de las culturas.

Además se presentan ciertas limitaciones que conciernen a ambas corrientes, por el lado internalista, se dejan de lado el contexto social y cultural en el que emergen los conceptos del conocimiento matemático o como lo afirma Vasco (2002), que este tipo de estudios se ciñen a la evolución y refinamiento de las concepciones "desde dentro" de las matemáticas. Desde la corriente externalista, la limitación está en ligar el estudio a una historia que señale el contexto sociocultural, las condiciones políticas, económicas o religiosas en el que emergen los conceptos, dejando de lado los aspectos teóricos que se encuentran inmersos.

De este modo, se puede identificar una temática de análisis dentro del trabajo histórico que relaciona la evolución de la teoría matemática en conjunto con el contexto sociocultural; los estudios histórico-epistemológicos, basados en el análisis de construcción teórica de un concepto, teniendo en cuenta el contexto particular de producción teórica. Al respecto, Anacona (2003) sustenta que:

> […] Esta clase de estudios ofrece significativos aportes a la educación matemática, pues tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han

> incidido en la construcción de una teoría, permite formarse una idea más completa del discurso matemático en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, las cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada y netamente formal.

En este sentido, el estudio y análisis de aspectos históricos y epistemológicos de las matemáticas aporta elementos que el docente puede considerar en su práctica educativa, tomando como referentes aspectos que giran en torno a las distintas concepciones de las matemáticas y la complejidad epistemológica de conceptos matemáticos, en donde se pueden analizar las posibles dificultades que se presentaron en la construcción teórica de éstos.

Lo anterior posibilita la acción de que el docente y el estudiante tengan una visión más amplia de las matemáticas y la relación existente de esta ciencia con el entorno.

A continuación se presentan las posibles formas de la incidencia[1] de la Historia de las Matemáticas en la práctica pedagógica del docente, por mencionar algunas:

- Como elemento en la elaboración de un currículo. Influye al realizar un análisis epistemológico que dé cuenta de la naturaleza del conocimiento matemático, se pueden diseñar los contenidos, puesto que la historia muestra que detrás de las matemáticas se encuentran nociones que han sido fundamentales en el proceso de su construcción.
- Como indicador de dificultades para la comprensión. Al tener conocimiento de la complejidad epistemológica de algunos conceptos matemáticos el docente puede comprender las eventuales dificultades que tengan los estudiantes al enfrentarse al nuevo conocimiento.
- Como diseño de actividades didácticas. Resulta atractivo para los estudiantes conocer las técnicas, símbolos y lenguajes que empleaban los antiguos matemáticos en la resolución e ilustración de un método de acuerdo a una época en particular.

[1] Anacona (2003), presenta en su artículo, las formas en las que la Historia de las Matemáticas influyen de alguna manera en el quehacer pedagógico del docente.

- Y por último, la Historia de las Matemáticas en la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas. Esta incidencia permite al docente tener una visión más amplia acerca de las diferentes concepciones de las matemáticas y poder así tomar una postura y las posibles implicaciones didácticas que generan dichas concepciones.

Así, se tiene entonces que hay que enfocarse más que en tener cierta formación en la línea de las matemáticas, también es importante conocer aspectos entorno a la historia de las mismas, en este sentido (Vasco, 2002)[2], afirma que la tensión que se presenta es que mientras mayor sea el conocimiento en Historia de las Matemáticas, más matemáticas debe saber el profesor que quiera utilizarlas; pero mientras más matemáticas sabe ese profesor, menos aprecia el valor de la Hitoria de las Matemáticas.

Con respecto a lo anterior, Vasco (2002) presenta una manera de aliviar la tensión mencionada, y es la de ponerse a la altura del profesor que así razona, y mostrarle con un ejemplo de las matemáticas que enseña cómo los estudiantes – y él mismo, aunque no lo confiese – aprenden más fácilmente, comprenden más a fondo y recuerdan mejor si se sigue el camino de la historia de ese ejemplo.

De esta manera, el saber que será objeto de enseñanza por parte del profesor, considerando los diferentes aportes de los estudios históricos-epistemológicos de conceptos matemáticos, debe ser un saber matemático transpuesto en un saber enseñado, en este sentido, el profesor desarrolla su actividad a partir de concepciones de las matemáticas, sobre los procesos de pensamiento y los actos de razonamiento del alumno y sobre los fundamentos epistemológicos de las ciencias (Arboleda & Castrillón, 2003).

Considerando las dimensiones epistemológicas de la teoría, el profesor debe estar en la capacidad de comprender la razón de ser de las teorías formales, permitiendo

[2] En este documento, Vasco presenta siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas, la tensión mencionada corresponde a la cuarta tensión irresoluble propuesta por el autor, quien más adelante en el mismo documento expone algunas sugerencias hacia el futuro.

elaborar las estrategias didácticas que le darán sentido en la clase al objeto matemático seleccionado para la enseñanza. A través de una serie de actividades de recontextualización y de repersonalización, los saberes matemáticos se actualizarán en la clase y terminarán por convertirse en conocimientos del alumno.

A partir de estos referentes teóricos se puede evidenciar el papel crucial que juega el llevar a cabo un tipo de análisis histórico y epistemológico de conceptos matemáticos y la relación existente con la Educación Matemática, como propuestas de tipo analítico que pueden llegar a servir de alguna manera en la planeación y ejecución del diseño de las clases para los maestros en su gestión y labor docente.

1.2.2 Pertinencia de los análisis de textos en la Educación Matemática

Algunos de los medios que el docente de matemáticas puede emplear para llevar a cabo su práctica pedagógicas son, por mencionar algunos; el uso de las tecnologías y medios de comunicación, juegos didácticos y secuencias didácticas que envuelven un concepto matemático que los estudiantes van construyendo, sin embargo, uno de los medios, y quizá, el más tradicional es el libro de texto.

Existen investigaciones que se encargan de ofrecer algunas de las formas en que se puede analizar un libro de texto, no sin antes presentar de forma precisa algunas posturas de los diferentes puntos de vista y concepciones que giran en torno a lo que se entiende primero que todo por libro de texto.

De este modo, en el trabajo realizado por Monterrubio & Ortega (2011), presentan una compilación de las diferentes definiciones que surgen con respecto al libro de texto, tomando como referencia el punto de vista teórico de varios autores. Así Van Dormolen (1986) (citado por Monterrubio & Ortega, 2011) distingue tres tipos de libros de texto: (a) aquellos en los que se encuentran sólo ejercicios y problemas, (b) los que se componen por un lado de teoría y por el otro problemas y ejercicios, y (c) los que constituyen una mezcla en la que se presenta la teoría, ejercicios y problemas mezclados, siendo éste último tipo considerado como un libro “a prueba de profesores", que es un tipo de manual elaborado con la intención de que el profesor lo siga fielmente.

Por otro lado, Rodríguez (1983) (citado por Monterrubio & Ortega, 2011) considera que el libro de texto es un material impreso, estructurado, destinado a ser utilizado en un proceso de aprendizaje y de formación concertada. En esta misma línea, Martínez (1992) (citado por Prendes, 2001) afirma que los libros de texto no son únicamente medios para la enseñanza sino que son una teoría sobre la escuela, un modo de concebir el desarrollo del curriculum y la relación entre profesor y los alumnos, siendo éste último binomio una interrelación, pues como lo afirman Love & Pimm (1996) (citado por Monterrubio & Ortega, 2011), aunque los textos escolares vayan dirigidos a los alumnos no se pretende que éstos trabajen solos con los textos, sino que se cuente con la intervención del docente. Así mismo, y muy de la mano con la interpretación de los autores mencionados, el Grupo Alborán (1991) (citado por Monterrubio & Ortega, 2011) señala que un libro por bueno que sea, será un instrumento ineficaz en el aula sino se cuenta con la labor del profesor.

Desde estos enfoques se puede apreciar cómo el papel del profesor es crucial con respecto al manejo del libro de texto en este sentido, Martínez (1991) (citado por Monterrubio & Ortega, 2011) manifiesta dos puntos de vista. Por un lado, considera los materiales a prueba de profesores, como aquellos que presentan la planificación educativa sin necesidad de que el profesor reflexione al respecto. Por el otro lado, considera los materiales como instrumentos de formación profesional, de manera que ubiquen al profesor en un papel activo.

De esta manera, el libro de texto es de ayuda en la planeación y práctica pedagógica del docente, siempre y cuando la labor no se vea limitada al empleo y uso de éste, por el contrario, debe ser un sujeto activo dentro de este proceso, que reflexione y analice frente a éste recurso.

Por lo anterior, Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (2009)[3] afirman que para seleccionar y utilizar un libro de texto, hay que ser cuidadosos como maestros, pues el libro de texto como operador tanto para el docente como para el estudiante, trae consigo una especie de peligros. Por un lado, estos riesgos como lo denominan los autores, es que la selección se realice por los sobornos ofrecidos por agentes y vendedores de las editoriales, descuidando la calidad como tal del libro de texto, además son otros de los peligros que el maestro ejecuta sobre la utilización, a tal punto de que el texto se convierta en el verdadero currículo, en un docente esclavo de éste, al considerar desde lo que toca y lo que no toca enseñar, hasta el dictado y el copiado en los cuadernos al pie de la letra del libro.

Es importante tener en consideración cómo se puede evidenciar el uso y selección del libro de texto por parte del docente, una inadecuada utilización puede generar falencias en la práctica pedagógica al limitar el libro de texto y seguirlo tal y como lo sugiere, lo ideal es considerarlo como un punto de apoyo para llevar a cabo estrategias en la planeación, pero no caer en la tentación de seguirlo al pie de la letra.

No obstante, el peligro de dicha selección no solo la sufren los docentes, los alumnos también corren el riesgo, al tener cierto grado de credulidad a lo que dice el texto, el aprendizaje de memoria, la limitación a las preguntas y ejercicios que van a salir en el examen, haciendo que el texto cierre la mente del alumno.

De este modo una selección pertinente y justificada de un libro de texto, permitirá, al menos de manera parcial, evitar que se presenten y se corran los riesgos expuestos. Sin embargo, no todo es negativo, y reflexionar respecto a este medio dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, puede llevar a mejorar la calidad de la educación, mejoras en la comprensión y adquisición de conocimientos matemáticos, al respecto Arbeláez et al. (2009) refieren que:

> […] Tal vez muchas de las actividades y ejercicios del texto son mejores que los se les ocurrirían al maestro o, para ponerlo más positivamente, la calidad de los

[3] Los autores presentan de manera concisa los peligros en la selección y utilización de los libros de texto tanto para los docentes como para los estudiantes.

> ejercicios puede estimularlo a hacer otros mejores, o al menos hacerlo avergonzar de los peores. Las sugerencias y ejercicios del texto alivian al maestro cuando tiene dificultades con el tema, el tiempo, la preparación de la clase o la inquietud de sus alumnos.

Es pues de gran relevancia considerar un libro como un soporte para el maestro en su gestión pedagógica y didáctica, que sirva para aplacar dificultades en la forma en que se pueden presentar determinados contenidos, la coherencia o la complejidad, el formalismo o la contextualización empleada de algunos objetos del conocimiento, asimismo Escudero (citado por Monterrubio & Ortega, 2011) sostiene que el libro de texto está constituido por tres dimensiones: (a) semántica, es decir, los contenidos; (b) estructural-sintáctica, que se refiere a su forma de organización y sistema de símbolos; y (c) pragmática, donde se tiene en cuenta su uso y propósitos. Desde esta perspectiva conceptual que el autor menciona con respecto al libro de texto, pone de manifiesto una forma de análisis de un texto escolar, claro está que no es la única vía de análisis, existen múltiples maneras de analizar un libro de texto, considerando a rasgos muy generales la parte conceptual, la organización o secuenciación de los contenidos y los propósitos, considerados como una fuente de análisis cuando se va a introducir una temática o un concepto determinado.

Es posible entonces hacer uso del libro de texto considerando dimensiones de análisis que permitan no sólo mejorar el quehacer pedagógico del docente, sino que el alumno no presente dificultades u obstáculos en el aprendizaje, pues el libro de texto como lo afirma Escudero (citado por Prendes, 2001) ha sido, y quiérase o no, sigue siendo uno de los materiales de mayor uso en la escuela.

De acuerdo a lo anterior, el libro de texto al parecer, tiene una tendencia a ser un material que no desaparecerá, y por ello es importante considerar que el uso no es exclusivo de los docentes, por el contrario los estudiantes también hacen uso de éste, y es en este sentido que se debe procurar por mejorar la calidad de la educación cuando se opta por utilizar un libro de texto en las clases de matemáticas, para prever de alguna manera las posibles dificultades que giran en torno a la conceptualización y/o la forma en que se presentan los objetos matemáticos.

Finalmente, Arbeláez et al. (2009) sugieren con respecto al poder del libro de texto, de su selección y utilización que a través de apropiadas sugerencias en el texto y a través de una buena guía del maestro pueden cambiarse muchas prácticas pedagógicas obsoletas e ineficientes, e introducir nuevas estrategias y actividades que ninguna reforma oficial puede lograr.

Con respecto a todo lo mencionado, lo relevante para este trabajo que busca encontrar las posibles variaciones de la manera en que es presentado el concepto de número entero negativo en dos épocas específicas, es por un lado, que los estudios histórico-epistemológicos permiten una aproximación de encontrar dificultades, obstáculos y diversos aspectos que han conducido a la construcción de una teoría que aparentemente es presentada de manera formal, facilitando al docente la interpretación de estos aspectos al momento de introducir o presentar el concepto como tal para que de manera parcial se puedan reducir falencias en la enseñanza y aprendizaje del concepto de número entero negativo.

Ahora bien, un acercamiento al concepto del número entero negativo bajo la perspectiva histórica y epistemológica son de gran relevancia para el objetivo de este trabajo, pero muy de la mano al llevar a cabo el análisis de dos textos de la Reforma de la Matemática Moderna y dos textos de la Matemática actual en la educación colombiana, para estipular si con el transcurrir de los años se siguen presentando obstáculos epistemológicos en los libros y las posibles variaciones o semejanzas presentes.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General.

Identificar los posibles obstáculos históricos y epistemológicos asociados a la concepción del número entero negativo a través del análisis de algunos textos en los periodos de la Reforma de la Matemática Moderna (1960-1980) y de la Matemática actual (2003-2013) en la enseñanza colombiana.

1.3.2 Objetivos Específicos.

- Contrastar a partir del análisis de textos, la caracterización del concepto de entero negativo en cada uno de los periodos establecidos entre los libros de textos de la Matemática Moderna y de la Matemática actual.

- Caracterizar los obstáculos históricos-epistemológicos presentes en dos libros de la Reforma de la Matemática Moderna y dos textos de la matemática actual, a través de la aplicación de una rejilla de análisis.

1.4 METODOLOGÍA

Este trabajo se inscribe en la línea de investigación de Historia de las Matemáticas, cuya modalidad escogida es de Monografía, la cual se basa en una actividad técnico-científica, presentando diferentes niveles de profundidad para acceder a un título de pregrado.

Para llevar a cabo la propuesta de trabajo se han diferenciado tres fases, las cuales se describen a continuación:

Primera fase

Como primera medida se tiene en cuenta en este trabajo, la presentación y justificación de la problemática planteada, considerando, por un lado, la importancia de la Historia de las Matemáticas en el campo de la Educación Matemática, y por el otro, la relevancia de llevar a cabo los análisis de texto como mejoras en la práctica pedagógica del docente. Así mismo, se indaga acerca de los avances teóricos del concepto de número negativo, mostrando desde una visión histórica y epistemológica, las diferentes referencias que sirvan como punto de apoyo en la incidencia de la enseñanza y aprendizaje.

Segunda fase

En esta fase del trabajo se presenta una aproximación histórica-epistemológica , matemática y curricular del concepto de número entero negativo, a través de una indagación bibliográfica que permita primero, mostrar las diferentes investigaciones y/o referentes del estado del arte de la problemática en cuestión, y segundo presentar los antecedentes que se divididen en dos dimensiones; una histórica y epistemológica, en donde se tiene en cuenta todo el proceso evolutivo y génesis del concepto, desde las nociones más antiguas del concepto de número y los diferentes sistemas de numeración en algunas de las culturas del mediterráneo, oriente y de América, tomando como soporte algunos autores, por mencionar algunos, Magaña, P (s.f), Hernández, M. (2010), quienes presentan de manera concisa un acercamiento a la evolución del concepto de número y los sistemas de numeración asociados.

Desde la dimensión epistemológica autores como Cid (2000), González, J. L., Iriate, M., Juméno, M., Ortíz, A., Ortíz, A., Sanz, E. & Vargas-Machuca, I. (1999) reportan algunos de los obstáculos epistemológicos de los números negativos en la enseñanza y aprendizaje.

Con respecto a la dimensión matemática se presentará la construcción de los números enteros negativos como clases de equivalencias, considerando en últimas todo lo relacionado con la parte formal y axiomática del conjunto numérico.

En la dimensión curricular, se considera la parte educativa, tomando como referencia aspectos de tipo didáctico y curricular. Autores como Bruno, A (1997) presenta en su trabajo, las formas de realizar la extensión a los números negativos, además Gómez, A. & Sánchez, A. (2008) exhiben en su trabajo las formas de construir modernamente cada conjunto numérico y la reforma curricular expedida por el MEN (2006).

Tercera fase

En esta última fase, se lleva a cabo el proceso de selección y análisis de los libros de texto, para ello se tiene como base dos libros de la época de la Reforma de la Matemática Moderna y dos libros de textos de la matemática actual, con la intencionalidad de poder realizar comparaciones, logrando en lo posible encontrar las variaciones y las dificultades históricas que se puedan generar en ambas épocas, en cuanto a la presentación que se efectúa del número entero negativo, para así mismo, establecer algunas recomendaciones que se pueden considerar al momento de introducir en los estudiantes este concepto, tomando como base el análisis histórico-epistemológico de la concepción del número entero negativo.

Como soporte teórico para llevar a cabo el análisis de los libros de texto, se tiene en cuenta la propuesta de análisis de textos históricos de matemáticas de Rico, L., Marín, A., Lupiañez, J. L. & Gómez, P. (2008), utilizando la técnica denominada análisis de contenido.

CAPÍTULO 2

2. PERSPECTIVA HISTÓRICA–EPISTEMOLÓGICA Y MATEMÁTICA DEL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO NEGATIVO

Durante el transcurso de la historia se puede observar cómo los conceptos matemáticos han ido emergiendo como respuestas a las necesidades de la humanidad o simplemente como avances dentro de una disciplina científica cuyas implementaciones se ven reflejadas en otras ciencias como la física, la astronomía, la química, entre otras. Se han realizado investigaciones que dan cuenta de diferentes aspectos en la construcción y evolución de un concepto determinado, en este caso el concepto de número entero. Estos conceptos han sido abordados desde perspectivas científicas, históricas, epistemológicas, didácticas y pedagógicas.

En el desarrollo de los fundamentos teóricos que sustentarán este trabajo de investigación se tendrán en cuenta elementos de naturaleza histórica, epistemológica, matemática y didáctica en especial las concernientes al análisis de textos, entre otras. Además se analizarán cómo se relacionan entre sí estas concepciones, dentro de cada punto de vista, para darle finalmente cuerpo teórico a este documento. Se recuerda que el objetivo de este trabajo es realizar un estudio histórico - epistemológico del número entero negativo, bajo el análisis de textos de los periodos de la Reforma de la Matemática Moderna y la Matemática actual. A continuación se presentan los referentes teóricos divididos en tres dimensiones a saber: *histórica, epistemológica y matemática.*

2.1 Dimensión Histórica del Concepto de Número Entero Negativo

Es habitual reconocer que los números naturales son uno de los objetos matemáticos que se encuentran en cualquier cultura. Frediani E. & Tenorio Á. (2004) indican que la arqueología confirma que la idea de número y su utilización surge en el mundo hace más de 30.000 años, siendo incluso muy posible que los ordinales precedieran a los cardinales, dado que el número se presenta primero como una necesidad para ordenar, y luego para contar o medir. Se dice que la necesidad de ordenar se presenta cuando nuestros antepasados necesitaban una forma de establecer el orden de participación en sus ceremonias religiosas, y la necesidad de contar o de medir magnitudes aparece cuando se desea crear una estructura social organizada y estructurada.

Con referencia a lo anterior, citar un origen como tal de los números, es remontarse a una historia de la época antigua, según Hernández (2010) quien presenta de manera concisa los sistemas numéricos en la antigüedad, el concepto de número se desarrolló de manera lenta, a lo largo de la evolución de la mente humana, tras un proceso de abstracción natural, ligado con aspectos de la vida diaria. El primer procedimiento aritmético inició con lo que modernamente se conoce como correspondencia biunívoca miembro a miembro, cuya facilidad era la de permitir a cualquier persona la posibilidad de comparar dos conjuntos de diferente naturaleza.

Con el tiempo el hombre diferenció entre “un lobo” y “muchos lobos”, y más tarde pudo establecer relaciones o equivalencias entre “un lobo”, “un arco”, momento en el cual tiene su génesis el concepto de unidad, de igual forma, se percataron de las relaciones entre pares de objetos: las manos y los pies, el hombre y la mujer, el día y la noche, proceso que terminó con el concepto de par y dos. Al parecer los únicos números admitidos por la mente humana eran el uno y el dos, hablando después de multitud, según los antropólogos del lenguaje.

Los primeros indicios de la actividad de contar objetos, se dio mediante el uso de los dedos de la mano, para representar conjuntos de hasta cinco o diez elementos y hasta veinte utilizando los dedos de los pies, si éstos eran insuficientes para llevar a cabo el conteo, se utilizaban montones de piedras. Al respecto, Magaña, (s.f) sostiene que el hombre primitivo tuvo muchas razones y situaciones de la vida diaria que lo incitaron a tratar de cuantificar todo lo que le rodeaba, para saber cuántas cabezas de ganado u ovejas poseía, para saber el número de armas o para cuantificar la extensión de los terrenos sembrados. Además, se vio en la necesidad de cuantificar las medidas en su modo base de contar, utilizando métodos como un sistema de rayas rasgadas en las paredes o pintadas en papiro, otro método era haciendo marcas en los troncos de los árboles.

Según se ha mencionado, es comparando cantidades, la idea primitiva con que el hombre dio inicio a la construcción del concepto de número. Más adelante el hombre ya contaba de dos en dos y de tres en tres, utilizando montones de piedras, que simbolizaban unidades de orden superior, siendo el núcleo de los sistemas de numeración, que fue diferente en cada cultura, a través de la invención de la escritura numérica, basada en la sustitución del concepto abstracto de número por signos convencionales. Como se presentará a continuación.

2.1.1 Sistemas de Numeración

Tomando como referencia a los Lineamientos Curriculares (1998), la comprensión de un concepto numérico se puede iniciar a partir de las apropiaciones que las personas tengan sobre el significado de los números, para ello se consideran las experiencias que han tenido en la vida cotidiana y la construcción del sistema de numeración teniendo como base algunas actividades como contar, agrupar y el uso del valor posicional.

Ahora bien, la forma como se han presentado los números a lo largo de la historia ha evolucionado. La manera como se presentan los números de acuerdo con Guedj, (1998) (citado en Frediani & Tenorio, 2004) alude a la forma visual, oral y escrita, él menciona además que la visual y la oral son posibles en diversos pueblos, pero que la forma escrita solo es posible en las civilizaciones donde aparece la escritura. Guedj, (1998) (citado en Frediani & Tenorio, 2004) menciona los siguientes sistemas de numeración:

> **1**. **Sistemas de numeración figurada:** son los constituidos por un sistema de marcas físicas realizadas sobre soportes u objetos. Entre estos sistemas de numeración se encuentran las cuerdas con nudos o quipus de los incas (desarrollados en el s. XIII d.C.).

2. **Sistemas de numeración hablada:** son los que atribuyen un nombre a cada número con palabras de la lengua natural, de modo que al transcribirlas por escrito, se escribirían con todas sus letras como en: uno, dos, mil.

3. **Sistemas de numeración escrita:** son los que emplean símbolos ya existentes o inéditos para representar los números. Entre estos sistemas se encuentran los sistemas de numeración de los mayas y de los aztecas, por ejemplo.

Se observa entonces que los principales sistemas de numeración que emergen en la historia, consideran una base que les permite expresar los números empleando cantidades pequeñas de símbolos, y también permitía la agrupación de unidades y establecimiento de escalas en la sucesión de los números, definiéndose así unidades de diversos órdenes. Guedj (1998) (citado en Frediani & Tenorio, 2004) ofrece una segunda clasificación de los sistemas de numeración, la cual está encaminada a como se deben interpretar los símbolos de un sistema de numeración escrito, a continuación se enuncia brevemente:

• **Sistema de numeración aditivo:** solo se emplea la operación adición para componer los números a partir de las cifras.

• **Sistema de numeración híbrido:** se emplean tanto la adición como la multiplicación a la hora de componer los números. La adición sirve para contabilizar qué aporta cada potencia de la base, mientras que en una misma potencia se recurre a la multiplicación.

• **Sistema de numeración de posición:** los sistemas de numeración posicionales emplean unos símbolos, que denominamos cifras y tienen un valor dependiendo del lugar donde se sitúan.

Se puede establecer que la escritura de los números a través de la historia, puede ser explicada no sólo a partir de la interpretación de cantidad que un número pueda generar, sino que éstos dependen de la ubicación o posición de los símbolos y la combinación o el principio aritmético de sumar y multiplicar para la obtención de otros números, conllevando a la identificación de la base que se utilizaba. A continuación se presentarán de manera general cada uno de los principales sistemas de numeración, teniendo en cuenta que las representaciones figurales de estos sistemas fueron tomadas de Hernández, M. (2010).

2.1.1.1Sistemas de numeración mediterráneos

Los sumerios: Hacia el año 4000 a.c, en el sudeste de la mesopotámica se instalaron los sumerios. Se caracterizaron porque contaban utilizando la base 60 (sistema sexagesimal), que en la actualidad aún quedan rastros de esta base, como lo son la forma de medición de ángulos y la medida del tiempo. Todavía no se conocía el número cero. Este sistema de numeración se basaba en el principio aditivo, es decir, que los nueve primeros números naturales, se representaban repitiendo el signo de la unidad tantas veces como fuera preciso; los números 20, 30, 40 y 50 se hacía repitiendo el de las decenas; los números 120, 180, 240 se hacía repitiendo el signo de la sesentena. En la figura 1 se puede apreciar la escritura del sistema de numeración:

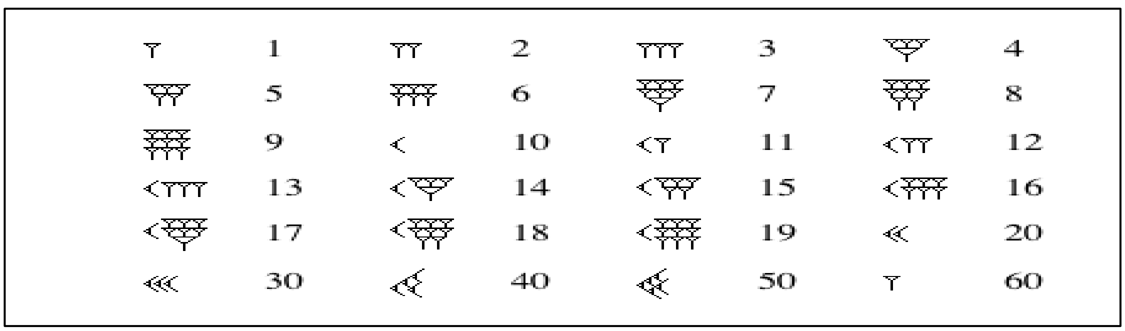


Figura 1. Representación del sistema de numeración de los muescas (sumerios)

Los semitas: por semitas se entienden varios pueblos como los acadios, los asirios, los babilonios entre otros, cuando estos pueblos llegaron a Sumeria, se produjeron tres etapas fundamentales, debido a que los semitas utilizaban un sistema de numeración decimal, y los sumerios un sistema de numeración en base 60.

La primera etapa concierne a la asimilación por los acadios de la cultura sumeria, adaptándose al sistema sexagesimal. En la segunda etapa, conviven los dos sistemas (sexagesimal y decimal), y en la tercera etapa, es eliminado el sistema sexagesimal. Por esta época apareció el primer cero, significando ausencia de unidades sexagesimales.

Los babilonios: Según Magaña, P (s.f) fueron los babilonios los primeros en contribuir al desarrollo de las matemáticas. Tenían un método de contar un poco complicado, su sistema de numeración era de base 60, llamadas sesentas babilónicas, los números ejes que utilizaban en su base de numeración era el diez y el sesenta, teniendo en cuenta el posicionamiento de estos caracteres así mismo se leían e interpretaban.

Según Perelman, Y. (1959) Los números en el sistema se representaban con la ayuda de sólo dos símbolos, una cuña vertical que representaba a la unidad y una cuña horizontal para el número diez. Estas cuñas resaltaban en las tablillas de las cuñas de arcilla, por los palitos inclinados, y tomaban la forma de un prisma. Los signos para el diez y la unidad repetían, correspondientemente tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades, en la figura se evidencia el sistema de numeración de los babilonios.

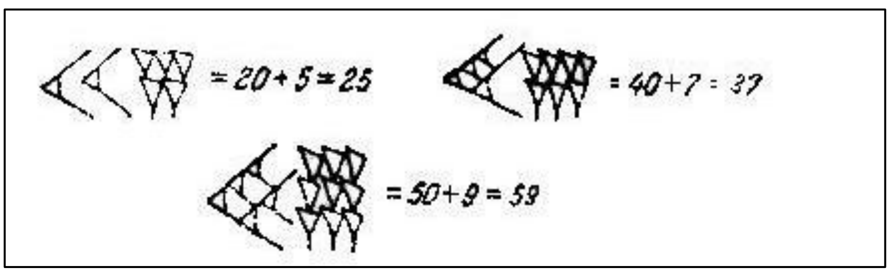
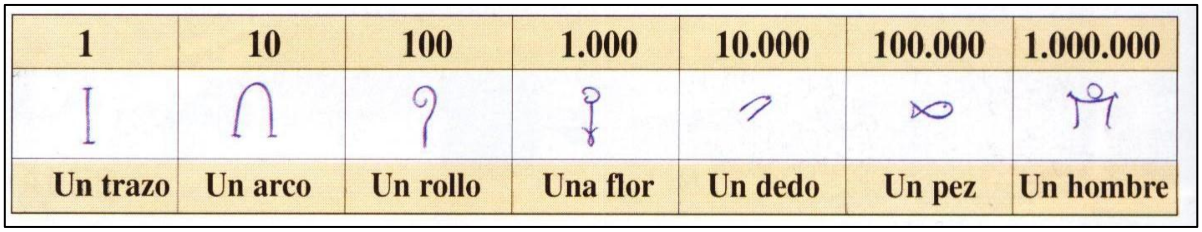


Figura 2. Representación del sistema de numeración babilonio

Los egipcios: Esta civilización inventó casi al mismo tiempo que en Mesopotamia, hacia el año 3000 a.c, su sistema de numeración en base diez, aditivo, no posicional, pudiendo representar números superiores a 10^6, por medio de jeroglíficos, tal y como se presenta en la figura 3.



1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Un trazo	Un arco	Un rollo	Una flor	Un dedo	Un pez	Un hombre

Figura 3. Representación del sistema de numeración jeroglífica egipcia.

Así mismo, en la Edad del Bronce apareció la necesidad de usar los números fraccionarios que representaban fracciones unitarias, es decir, con numerador 1. Se puede evidenciar que hasta el momento, no se hacía uso ni del número entero negativo ni de un sistema de numeración para este tipo de números, caso contrario con el sistema de numeración de las fracciones que empleaban los egipcios como se presenta en la figura 4:

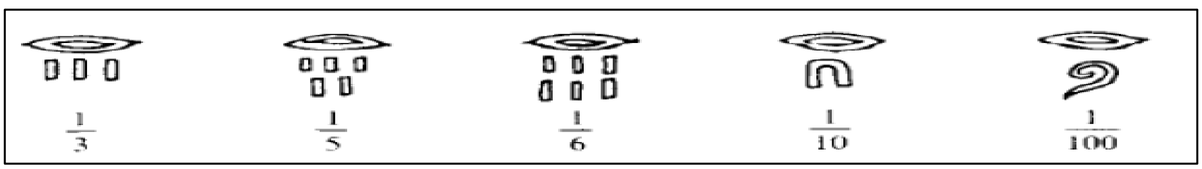


Figura 4. Representación de las fracciones.

Los griegos: Esta civilización tomó el diez como base en su sistema de numeración, usando letras del alfabeto como símbolos para los números, según Marín, M. & Ospina,G. (1998), es en la Grecia antigua donde se empieza a desarrollar un sistema teórico matemático independiente de lo empírico, porque en las culturas pre griegas existen prácticas matemáticas que no están desligadas de problemas concretos de la vida cotidiana o de la construcción de templos o monumentos. En este sentido, se destacan tres etapas importantes en la antigüedad griega.

En primer lugar están los presocráticos, siendo Pitágoras, quien con su filosofía basada en la idea de número, donde las cosas son números y los números son cosas, les atribuía representaciones geométricas y además espirituales, así existían los números triangulares, cuadrados y oblongos, ligados a una cosmovisión del mundo y servían para explicarlo.

En segundo lugar se encuentra la escuela de Atenas, prevaleciendo filósofos importantes como Platón y Aristóteles. Para Platón los números y las matemáticas habitaban en un mundo ideal independiente del hombre, es decir, las matemáticas ajenas del mundo sensible. Por otro lado, para Aristóteles los números son construidos en el proceso de abstracción y generalización llamado *aphairesis,* así el número consiste en una colección de unidades (Marín, M. & Ospina, G. 1998).

Así mismo, la anterior definición trae consigo tres cuestiones importantes, en primer lugar la unidad es sintética y no se puede dividir; en segundo lugar, el uno no se considera número debido a que la connotación de número implica pluralidad y no singularidad. En tercer lugar, el cero tampoco es considerado como número pues éste se asocia al vacío o la carencia y dentro de la filosofía de los griegos el ser se opone al no ser.

Desde esta mirada histórica y filosófica se puede apreciar la existencia de los números naturales excluyendo el uno y el cero que para la civilización griega carecían de significado, al igual que las cantidades negativas a las que no hacían alusión.

El sistema de numeración era Jónico o alejandrino, donde se empleaban las letras minúsculas del alfabeto y algunos símbolos, lo que resultaba complicado poder realizar operaciones aritméticas. En la figura 5 se presenta el sistema de numeración griega:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	ϰ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ο
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	Τ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Figura 5. Representación del Sistema de numeración griega.

Los romanos: Utilizaron símbolos que estaban compuestos por siete letras (I-V-X-L-C-D-M), nunca usaban más de tres signos juntos, así las tres primeras cifras eran representadas por tres rayas verticales, el cinco se representaba con la letra V, el diez con la letra X, el cuatro lo significaban restando de una cifra mayor como el cinco la unidad, para obtener el nueve le restaban a diez la unidad.

La contribución de esta esta civilización a las matemáticas según Magaña, P. (s.f) concierne a que éstas estuvieron limitadas a algunas nociones de agrimensura, surgidas de la necesidad de medir y fijar fronteras del imperio. La huella romana en su sistema de numeración continua siendo vigente esto se observa en los capítulos de libros, en la sucesión de los reyes y en la notación de los siglos.

2.1.1.2 Sistemas de numeración orientales

A los griegos en el estudio de las matemáticas le sucedieron los hindúes, que recibieron su influencia directa, posteriormente cuando fueron dominados por los árabes en el 632 A.D quienes tomaron y mejoraron los símbolos numéricos de los hindúes lo mismo que la notación posicional Magaña, P. (s.f).

Los hindúes: Esta civilización se caracterizó por dominar por completo el arte de contar, su sistema de numeración era de base diez o decimal, eran hábiles matemáticos, resolvieron un gran problema al inventar el símbolo del cero denominándolo sunya. Al respecto, Hernández, M. (2010), afirma que se cree que el concepto de cero apareció en siglo V d.C , en el año 510 cuando el astrónomo indio Aryabhata inventó una notación numérica que precisaba un conocimiento perfecto del cero y del principio de posicionamiento en base decimal.

Hasta el presente se puede observar cómo en las diferentes civilizaciones no se hace presente un sistema de numeración ni una referencia puntual acerca del concepto de número entero negativo, sin embargo, en el año 628, el matemático y astrónomo Brahmagupta describe métodos de cálculo con las nueve cifras y el cero, además de usar las reglas algebraicas de números positivos y negativos, en las que el cero está presente como concepto matemático (Hernández, 2010). En la figura 6 se puede apreciar el sistema de numeración de los hindúes.

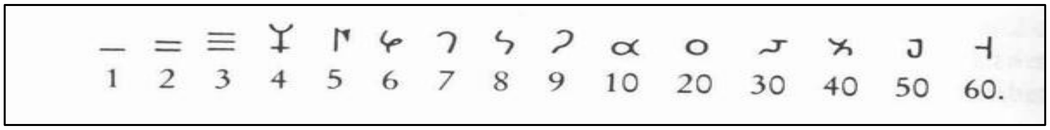


Figura 6. Representación del sistema de numeración Hindú.

Desde esta época se describían métodos operatorios con las cifras y usando reglas algebraicas se operaba con números positivos y negativos sin tener una clara conceptualización de estos números, al respecto Anne(2002) afirma que los números negativos aparecen como auxiliares de cálculo; no hay números negativos en los enunciados de los problemas, tampoco los hay en las respuestas. Las reglas de cálculo están dadas pero nadie se preocupa por justificarlas.

Los chinos: Este pueblo también inventó su propio sistema de numeración hacia el año 1500 a.c, era un sistema que combinada el principio aditivo con el multiplicativo en base diez, y se debía tener en cuenta el orden de escritura, ya fuera vertical (de abajo hacia arriba) u horizontal (de izquierda a derecha). Emplea una serie de trece ideogramas hasta la decena, centena, millar y decena de millar (Hernández, 2010). En la figura 7 se presentan los ideogramas o el sistema de numeración de los chinos.

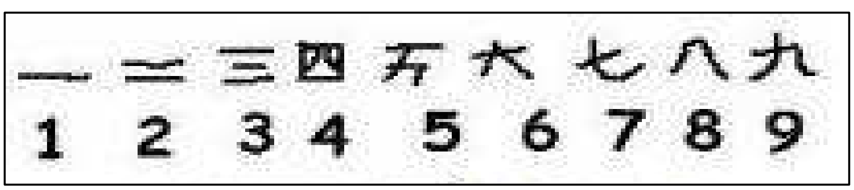


Figura 7. Representación del Sistema de numeración chino.

Desde épocas remotas 400 a.c., los chinos realizaban sus cálculos aritméticos utilizando pequeñas varillas. Colocaban los denominados números barra sobre una superficie plana (tablero de cálculo). Así, el concepto de número expresado en palabras se transcribió a una notación posicional sobre un tablero de cálculo (Gallardo, A., & Hernández, A. 2007). Los nueve dígitos de la notación de número barra eran de dos tipos, dependiendo de la posición, como se presenta en la siguiente figura:

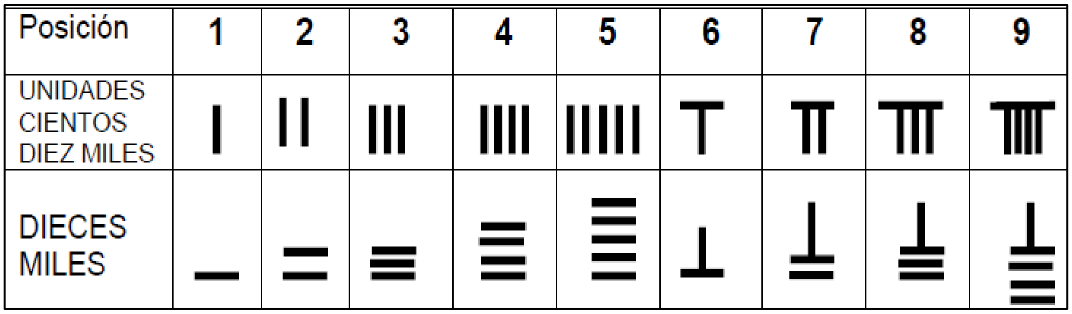


Figura 8. Notación de número según la posición.

Los chinos realizaban las operaciones elementales, y gracias al uso del cálculo el concepto del cero evolucionó. Así también, los chinos como lo afirman (Gallardo, A., & Hernández, A. 2007) utilizaron varillas de color rojo para representar o hacer alusión a los números positivos y varillas de color negro para representar los números negativos. En la notación de los números barra, la forma alternativa de indicar los números negativos fue colocar una varilla en forma diagonal. Así por ejemplo el número -806 se expresaba como:  .

Los números barra consistían en los números que hacían referencia a precios de venta, precios de compra, excedente y déficit, de este modo los conceptos de positivo y negativo evolucionaron de entidades opuestas, como ganancia y pérdida, comprar y vender, en el tablero de cálculo se desprenden dichas asociaciones lingüísticas y devienen en un conjunto numérico, cuyas propiedades se conectan con las de otro grupo familiar, el de los números positivos.

Además, el tablero de cálculo permitió a los chinos extender sus bases aritméticas a otros niveles, incluso el método que involucra los números barra era aplicable no solo a problemas particulares sino que se podía generalizar a conjuntos de problemas, como los que se presentaban en álgebra, en donde cobran sentido los números negativos en la resolución de ecuaciones.

Se puede evidenciar cómo el concepto de número negativo se presenta desde épocas remotas en el año 400 a.C, desde los chinos con la utilización de este concepto y de manera no formal en prácticas de su diario vivir, asociándolo a situaciones contextualizadas como el hecho de comprar o vender y la forma en que era representado en el tablero de cálculo, con una barra diagonal que hacía referencia a la negatividad.

Los árabes: El sistema numérico actual (llamado arábigo) no fue inventado por los árabes, sino por los hindúes, al cero lo llamaron céfer, que en el idioma árabe significa vacío.

Este nuevo sistema de numeración se fue esparciendo por occidente reemplazando a los números romanos. Así en el año 1500 d. c la aritmética explicaba el sistema de numeración arábigo con todo lujo de detalles.

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Figura 9. Representación del sistema de numeración árabe.

2.1.1.3 Sistemas de numeración americanos

En el continente americano se desarrollaron grandes civilizaciones, entre ellas se destacan los Mayas y los Incas, como las culturas con avances matemáticos más representativos en América.

Los mayas: Esta civilización se caracterizó según Hernández, M. (2010), porque practicaban el comercio y la agricultura por medio de las observaciones solares, su sistema tiene alguna semejanza con el romano. Conocieron el cero y su sistema de numeración era en base veinte o vigesimal pero posicional, es decir, escribían de arriba hacia abajo y utilizaban el cinco como base auxiliar.

Los números del uno al diecinueve se representaban por medio de puntos y barras consecutivas verticales, el número uno era representado por un punto, los puntos se repetían hasta cuatro veces, el cinco era una raya horizontal a la que se le añadían puntos hasta llegar al nueve (Magaña, s.f).

El cero por un ojo o una concha semicerrada con un punto adentro. En la figura 10 se presenta el sistema de numeración de los mayas.

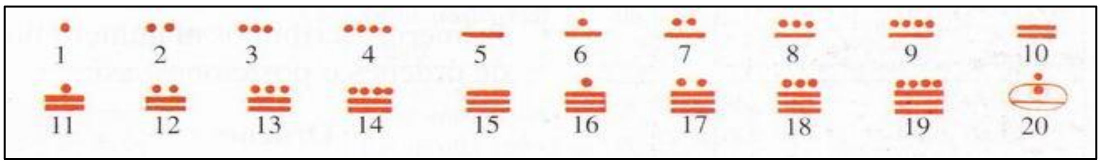


Figura 10. Representación del sistema numérico maya.

Los incas: Con respecto a los incas, Blanco, H. (2009), sustenta que éstos desarrollaron un sistema de información llamado *Quipu,* que está compuesto por una cuerda principal, más gruesa que las otras, de la cual cuelgan otras cuerdecitas. La longitud de éstas varía de 20 a 50 cm y un *Quipu* puede estar formado por un mínimo de 3 hasta 2000 cuerdecitas. Una cuerdecita puede estar hecha por numerosos hilos de un determinado color, o bien por una combinación de hilos de diferentes colores.

En cada cuerdecita, fijada a la cuerda principal, hay grupos de nudos. Cada nudo o grupos de nudos representan un número. Cada grupo contiene de 0 a 9 nudos y e+}stán separados por espacios que distinguen la posición de uno con respecto a {otro. Su sistema se trata sobre un sistema posicional en base decimal: los nudos largos (L) representan las unidades, los nudos individuales o nudos simples (S) colocados en sucesión representan las decenas, las centenas y los miles. En la figura 11 se puede apreciar los nudos del Quipu.

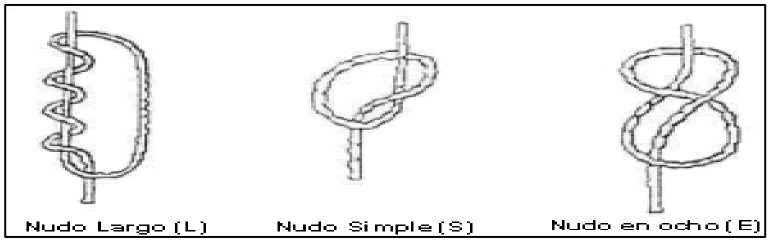


Figura 11. Nudos del Quipu.

El número 1 en la posición de unidad está representado por un nudo en ocho (E), además el cero aunque no era considerado como número, lo representaban como la ausencia de nudos o por una cuerda sin nudos.

A partir de la presentación de los diferentes sistemas de numeración que se desarrollaron en las diferentes culturas, se puede inferir que la representación del número, se basa generalmente en los números enteros positivos, en algunas culturas como en los incas, los mayas y los árabes, consideraban el cero como la ausencia de cantidad, es decir que no estaba conceptualizada como tal la idea de número sin embargo tenían un sistema de numeración para éste.

En otras culturas como en la hindú, el cero está presente como concepto matemático y describían reglas algebraicas de números negativos y positivos. Los chinos fueron, al parecer, los que utilizaron desde el primer siglo los números negativos asociándolos con situaciones de la vida cotidiana como; ganancias y pérdidas, compras y ventas, e inventando un sistema de numeración propio para estos números.

Otras civilizaciones como la de los egipcios consideraban números fraccionarios con numerador 1, con un sistema de numeración propio para estos números pero sin rastro alguno de números negativos. Hernández, M. (2010), afirma que se puede visualizar cómo en las diferentes culturas se formalizó la acción de contar, creando sistemas de numeración.

Sin embargo, matemáticos indios como Brahmagupta en el siglo VII, enseña la manera de hacer sumas y restas, usando bienes, deudas, la nada. Las reglas de cálculo están dadas pero nadie se preocupa por justificarlas. Los números negativos van a aparecer en el cálculo, y los matemáticos se permitirán practicar las operaciones, aunque las reglas no estén establecidas (Anne, 2002).

2.2 Algunos Elementos Históricos para la caracterización de los Números Negativos

Los números negativos aparecen en occidente a finales del siglo XV, como una génesis algebraica, relacionados con la resolución de ecuaciones, es Cardano (citado por Recalde, L., 2005) quien consideraba las raíces de las ecuaciones como ficticias, mientras que a las positivas las denominaba raíces reales. Por esta misma época, otros matemáticos, como Vieta no admitían a los negativos ni como coeficientes ni como raíces en las ecuaciones, ellos darán solo las soluciones positivas de éstas.

Según González, et al., (1999), para el matemático flamenco S. Stiven, los números negativos son útiles como herramientas de cálculo, lo que le lleva a otorgarles una existencia como símbolos independientes en un cálculo numérico. Admite la adición de $x + (-y)$ en lugar de considerarla como sustracción de y a x. Trató de justificar por medio de la geometría la regla de los signos partiendo de la siguiente identidad algebraica:

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

Cuya representación se establece mediante la siguiente figura:

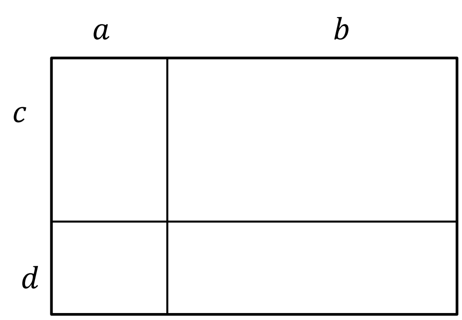


Figura 12. Representación geométrica de la regla de los signos.

Sin embargo, Stiven carece de interpretación para los negativos y de las raíces negativas de una ecuación dice que son las raíces positivas de su trasformación. Es decir, que si $-a$ es un número negativo raíz de $x^2 + px = q$ entonces, el número positivo a es raíz de $x^2 - px = q$. Tampoco para Stiven los negativos son fiables, debido a la definición de número dada por él, sobre la cual un número es aquello que expresa cantidad (González, et al., 1999).

Se puede ver de manifiesto las diferentes posturas que giran en torno al número negativo en el campo algebraico, en particular en la resolución de ecuaciones, en este sentido González, et al., (1999) afirman que:

> […] Con el desarrollo del álgebra, los negativos aparecen de nuevo en escena, provocando entre los algebristas reacciones diversas que van del rechazo a la tolerancia, pasando por el espanto que hace que se les califique de falsos, ficticios o absurdos. Pero este rechazo es ya un síntoma de que los matemáticos se han detenido en ellos y una forma de reconocer su existencia aunque sea a través de negársela. Quizás el término "negativo" provenga de esta época, ya que eran los valores negados cuando se obtenían como raíces de una ecuación.

La introducción de los números negativos en Europa hacia el siglo XV durante la época del renacimiento, según Gallardo, A., & Hernández, A. (2007), la realiza Nicolás Chuquet quien tuvo gran audacia de dar sentido a soluciones negativas en ecuaciones y problemas. Sus lenguajes y métodos algebraicos permitieron encontrar soluciones a las que algunos contemporáneos consideraban insolubles. Si el método conducía a un número negativo, este era la respuesta y debía ser interpretado como tal. Los números negativos adquieren presencia escrita gracias al lenguaje simbólico creado por Chuquet, no serían invisibles ni absurdos.

Sin embargo, a pesar de la introducción realizada por Chuquet de los números negativos en el siglo XV, durante el siglo XVIII los negativos siguen siendo objeto de discusión, debido en gran parte a la falta de un modelo unificador que le sirva de soporte. Según D´Alembert (citado en González, et al., 1999), las cantidades negativas son aquellas que son observadas como menores que nada[4] y que están precedidas del signo menos. En el contexto del cálculo, para D´Alembert la

[4] Entiéndase *nada* como lo que no se puede concebir.

aparición de una raíz negativa significa que hay que modificar el enunciado, no le da cabida al negativo como número, tan solo le da entidad en algunas situaciones como cantidad negativa. En uno de sus problemas no admite -50 como número y lo traduce por restar 50, identificando el signo $(-)$ de negativo con el signo $(-)$ de la sustracción.

De este modo la legitimización de los números negativos se realizó treinta años después, gracias a Hankel, H. (1867) (citado en Anne, B., 2002), quien aborda el problema de manera formal. Las reglas de la adición y de la multiplicación deben ser las mismas para todos los números reales positivos o negativos. Los negativos tienen el estatus de número y realiza la distinción del signo $(-)$ del opuesto y del signo $(-)$ de la sustracción.

De acuerdo con González, et al., (1999), Hankel no buscó la justificación de los negativos en situaciones reales, es decir, no buscó considerar los números negativos asociados a la realidad física, sino que los justificó en las leyes formales, como entes matemáticos que cumplen ciertas relaciones entre ellos.

2.3 Dimensión Epistemológica del número entero negativo

Los números enteros negativos atravesaron por grandes dificultades de aceptación en la comunidad de matemáticos, su carácter de ser consolidado como objeto matemático de manera netamente formal se estableció en el siglo XIX cuando Hankel, H (1867), se propuso ampliar la multiplicación de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ respetando las propiedades de la estructura algebraica de los reales positivos (Cid, 2000).

La existencia de obstáculos en la Historia de las Matemáticas, y más aún en la historia de los números enteros negativos, generaron polémica. Brousseau (citado en Cid, 2000), califica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la Historia de las Matemáticas, y cuando la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual. En otras palabras la noción de obstáculo epistemológico está adherida a la resistencia de un saber mal adaptado, lo cual obedece a la noción de obstáculo de Bachelard[5] que hace referencia a:

> "El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como lo creemos de acuerdo a las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos son establecidos como obstáculos. Adicionalmente dentro del funcionamiento del maestro y del estudiante, el error se constituye como el sentido del conocimiento adquirido." Tomado de Artigue M, Epistemología y Didáctica, (1990). Traducción Olaya, M. (Sf)

Cid (2000) afirma que la definición de obstáculo epistemológico conlleva el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber transmitido.

2.3.1 Algunos obstáculos epistemológicos en la concepción del número entero negativo

Algunas investigaciones reportan obstáculos epistemológicos que giran en torno al concepto de número entero negativo, al respecto Glaeser (1981) (citado en Cid, 2000), hace su primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos, partiendo de la noción de obstáculo refiriéndose o equiparándolo a dificultad, umbral, síntoma. Bajo esta perspectiva Glaeser considera los siguientes obstáculos epistemológicos a partir de la evolución histórica del concepto de número negativo:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. Es Diofanto quien a partir de efectuar cálculos algebraicos con diferencias establece la

[5] Gastón Bachelard introduce la noción de obstáculo epistemológico en la publicación de 1938 titulada "la formación del espíritu científico".

regla de los signos, pero no acepta la existencia de números negativos.

- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Algunos matemáticos como Stiven, D´Alembert y posiblemente Descartes, conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, pero no las aceptan como cantidades reales, sino como cantidades ficticias.
- Dificultad para unificar la recta real. Matemáticos como McLaurin, D´Alembert, Carnot y Cauchy concebían a los negativos y los positivos en términos antinómicos, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero en un sentido opuesto y de naturaleza distinta. Esta situación no facilitaba la unificación en una única recta numérica de los negativos y los positivos, en cambio favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.
- La ambigüedad de los dos ceros. Este obstáculo hace referencia a las dificultades que hubo entre los matemáticos Stiven, McLaurin, D´Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace, para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente, pues los matemáticos de la época afirmaban que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran menos que nada.
- El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Con la superación de los obstáculos anteriores se aceptan los números negativos como cantidades reales con Hankel en 1867, quien justificó la estructura aditiva pero no la mulplicativa. Glaeser (citado en Cid, 2000) denomina estadio de las operaciones concretas a una corriente ideológica que tiene sus inicios en los Elementos de Euclides y se caracteriza por suponer que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico.
- Deseo de un modelo unificador. Es el deseo por parte de la comunidad de matemáticos de poder establecer un modelo concreto que permita justificar la estructura aditiva y la multiplicativa de los números enteros para poder ser comprendida por las personas que están en vías de aprenderlos.

De este modo, Cid (2000) afirma que, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explica sin problema alguno la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. Así mismo Glaeser (citado en Cid, 2000) establece que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa.

Siempre ha sido objeto de discusión las dificultades que se presentan al momento de enseñar y aprender el concepto de número entero negativo, González, et al., (1999), reportan por un lado, que uno de los obstáculos que se generan en la enseñanza de los números, es que la enseñanza de éstos no admite ser enteramente tratada, de forma creíble, en el plano concreto, aunque algunos autores se esfuercen en buscar situaciones que se asemejen a situaciones concretas en las que se puedan justificar todas las propiedades de los enteros; pero por otro lado, situarlos de entrada en el plano formal trae consigo consecuencias como las de reducir a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y causar dificultades.

Ambas formas de enseñar y aprender el concepto de número entero, implican, en la primera, que las matemáticas se obtienen por abstracción a partir de lo real; en la segunda se supone que las matemáticas constituyen una actividad creadora de teorías que después se aplican y explican la realidad (González, et al., 1999).

De esta manera, el obstáculo presente está enmarcado en las relaciones entre lo real y lo formal, es decir, por la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real (González, et al., 1999).

Con respecto a lo anterior, González, et al., (1999), presenta una serie de obstáculos encaminados en el aprendizaje de los números enteros, bajo la perspectiva de que los obstáculos presentes en la enseñanza de los números enteros no ha sido provocar el conflicto sino evitarlo, con lo que las concepciones ingenuas de la aritmética práctica han seguido vigentes y los números enteros se han visto reducidos a un formalismo vacío, obstáculo que impide el conocimiento de los números enteros. En este sentido, se presentan los siguientes obstáculos:

- La aritmética práctica. Lo real como obstáculo. El gran obstáculo dentro de la matemática fue la creencia de que el número estaba relacionado plenamente con la cantidad, creencia que se vio favorecida por la concepción que de las matemáticas predominó hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real .La ruptura de esta concepción se presentó mediante la aparición de las geometrías no euclídeas, el surgimiento del álgebra abstracta y el reconocimiento de los números enteros como extensión de los números naturales.
- El número como expresión de cantidad. Con la aparición del número entero negativo surge la ruptura de algunas ideas, entre ellas, la idea que bloqueaba a Descartes cuando afirmaba que no existen números menores que nada.
- La suma como aumento. Al estar el número relacionado con la noción de cantidad, la adición se identifica con la acción de añadir una cantidad a otra, por lo que conlleva siempre a un aumento.
- La multiplicación como aumento. La concepción de considerar la suma como aumento se traslada para la multiplicación, siendo esta idea un obstáculo verificada cuando a los estudiantes se les pregunta: ¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero? (González, et al., 1999).
- La sustracción como disminución. La sustracción identificada con la acción de quitar está asociada con la disminución. La insistencia de los libros de texto basados en la definición formal: $a - b = c \; si \; y \; sólo \; si \; a = b + c$, no destruyó sus intuiciones acerca de la sustracción.
- La división como división natural. En los números naturales la división se interpreta como reparto o agrupamiento de objetos esta concepción genera un obstáculo epistemológico, por no permitir la generalización a la división de números enteros, donde el número negativo deja de ser un objeto concreto.
- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural. En los números naturales los números van aumentando a medida que se alejan del

origen. Trasladar esta secuencia a los negativos es un obstáculo que satisface la puesta en acción a la siguiente pregunta: *"¿Cuál es el número mayor en una unidad a -3?" y los estudiantes respondan "-4".*

Este error según González, et al., (1999) tiene su antecedente en el siglo XVIII cuando Carnot manifestó al observar que siendo $-3 < 2$, y $(-3)^2 > 2^2$, expresa que el cuadrado de la cantidad menor es mayor que el cuadrado de la cantidad mayor, y esto colisiona con la idea de que el número se identifica con la cantidad.

- Identificación de los símbolos literales con números positivos. En el siglo XVIII Euler simbolizaba los números negativos con una letra precedida del signo $\ll - \gg$; en $-x$, x representa un número positivo. Así mismo Cramer ante el estudio de la curva:

  $y = {x^2}/{6a} + x + \left({5}/{6}\right)a$, asume para los valores negativos el estudio a esta otra: $y = {x^2}/{6a} - x + \left({5}/{6}\right)a$, donde la letra x representa un número positivo. Esta idea es al que cuesta a los estudiantes de admitir que $\ll a \gg$ puede representar a un número negativo y $\ll -a \gg$ puede representar a un número positivo.

  En este sentido, Bruno, A. (1997), añade que los cambios que se producen en la simbología $(+a = a)$ o las reglas de los paréntesis son la causa de las dificultades y obstáculos que surgen en el aprendizaje de los números negativos.

- La imposición de lo formal como obstáculo. Desde esta perspectiva de obstáculo González, et al., (1999) afirma que los números enteros aparecen en los libros de texto reducidos a un formalismo vacío, que se constituye en un obstáculo y origina errores.

Como se puede observar son varios de los obstáculos que se presentan y se presentaron a través de la historia, que deben ser tenidos en cuenta cuando un docente en ejercicio introduce el concepto de número entero negativo en las clases, que como bien es sabido, por parte de la comunidad de matemáticos de determinadas épocas, este concepto presentado desde una visión formalista, puede generar obstáculos en el aprendizaje, al no encontrar una relación con la aritmética práctica y, sin embargo, si es presentado de manera en que se relacione con modelos concretos los obstáculos y la falta de comprensión siguen presentes.

2.4 Dimensión Matemática del Concepto de Número Entero Negativo

Desde esta dimensión del trabajo se tiene en consideración los aspectos de tipo netamente matemático, es decir, fundamentando el concepto de número entero negativo[6] bajo la construcción formal de este conjunto numérico, a partir de clases de equivalencias obtenidas a partir de pares de números naturales.

Se obtienen los números enteros calculando diferencias entre números naturales. Por ejemplo, $-1 = 3 - 4$, $-2 = 6 - 8$, $3 = 8 - 5$. Esto indica que una de las maneras de representar el número entero negativo -1 es mediante el par $(3,4)$. El problema es que existen muchos pares que sirven para esta representación, por ejemplo,$(10,11)$, $(13,14)$, $(15,16)$.

Se identifican todos los pares, de modo que el -1 venga a ser la clase de todos los pares (a, b) tales que a y b son números naturales y $a - b = -1$.

Se define una relación de equivalencia $\sim$ entre pares ordenados de números naturales como se sigue:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Teorema 1. 1 *La relación $\sim$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una relación de equivalencia.*

Se puede verificar que:

[6] Construcción tomada de: Gómez, A. & Sánchez, A. (2008). En este trabajo de grado se presentan herramientas conceptuales y curriculares de los conjuntos numéricos, indicando la construcción formal, resaltando las nociones básicas del conjunto de los números naturales, enteros y racionales.

I. Es reflexiva ya que $(a,b)\sim(a,b)$ ya que $a+b=b+a$

II. Es simétrica ya que $(a,b)\sim(c,d) \Rightarrow (c,d)\sim(a,b)$

III. Es transitiva ya que si $(a,b)\sim(a_1\,,\ b_1)\ y\ (a_1\,,\ b_1)\sim(a_2,\ b_2) \Rightarrow (a,b)\sim(a_2\,,\ b_2)$

Definición 1.1 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$ *, Conjunto de las clases de equivalencia, se llama conjunto de los números enteros y cada clase de equivalencia se llama número entero.*

De esta manera, por notación se tiene que:

$$\mathbb{Z}=\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim\ \text{ y }\ [a,b]\ para\ las\ clases\ de\ equivalencia.$$

$$C_{(a,b)}=\ \{(x\,,y)\in\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}:(x,y)\sim(a,b)\}$$

Así el número -4 puede definirse a través de clases de equivalencia, como se presenta a continuación:

$-4=\ C_{(4,8)}=\ \{(x\,,y)\in\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}:(x,y)\sim(4,8)\}$ ya que $4-8=-4$, y así se tienen otros pares ordenados que pertenecen a esta clase de equivalencia, como por ejemplo, $(6\,,10),(10\,,14),(12\,,16)$.

Definición 1.2 *Suma de números enteros.*

La operación suma entre números enteros está definida de manera general como:

$$[(a,b)]+[(c\,,d)]=\ [(a+c\,,b+d)]$$

La adición se efectúa componente a componente de cada clase de equivalencia. Para ejemplificar más esta operación analicemos la siguiente suma de números enteros:

$$(-3)+7=4$$

Para el lector puede o no ser evidente la respuesta, pero aplicando *definición 1.2,* tendremos:

$$(-3)+7=\ [(1\,,4)]+\ [(9\,,2)]=\ [(1+9\ \,,4+2)]=\ [(10,6)]=4$$

Definición 1.3 *Producto de números enteros.*

El producto entre números enteros se define como:

$$[(a\ ,b\ )]\ \bullet\ [(c,d)] = [(ac+bd\ ,ad+bc)]$$

Veamos un ejemplo de producto entre números enteros:

$$(-3)\bullet(7) = [2\ ,5]\ \bullet[9\ ,2] = [(2\bullet 9+5\bullet 2\ \ ,2\bullet 2+5\bullet 9)] = [18+10\ ,4+45]$$
$$= [28,49] = 28-49 = -21$$

Definición 1.4 *El valor absoluto de un número entero a se denota como $|a|$ y se define de la siguiente manera:*

$$|a| = \begin{cases} a\ si\ a\ \geq 0 \\ -a\ si\ a\ < 0 \end{cases}$$

De acuerdo a la definición anterior, se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo:

$|3|$, como $3 \geq 0$, entonces por definición de valor absoluto se tiene que $|3| = 3$

Mientras que si se tiene que $|-5|$, como $-5 < 0$, de acuerdo a la definición de valor absoluto, tenemos: $|-5| = -(-5) = 5$

Como se puede observar, el valor absoluto de un número entero es la distancia desde el origen hasta dicho número, por ello éste siempre es positivo o cero.

Las propiedades fundamentales del valor absoluto para $a,b\in\mathbb{Z}$, se pueden sintetizar en los siguientes teoremas:

Teorema 1.2 *Sean $a,b\ \in\ \mathbb{Z}$, entonces se tiene que:*

I. $|a| > 0\ \ si\ \ a \neq 0\ \ y\ \ |0| = 0$
II. $a\ \leq |a|\ \ ;\ -a \leq |a|$
III. $|a| = |-(a)|$
IV. $|ab| = |a||b|$
V. $|a^{-1}| = |a|^{-1} = \frac{1}{|a|}\ \ ,\ a \neq 0$

VI. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ ,\ b \neq 0$

VII. $Desigualdad\ triangular.$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Esta desigualdad ocurre solamente cuando $a \geq 0\ \ y\ \ b \geq 0\quad ó\ \ a < 0\ \ y\ \ b < 0$

Teorema 1.3 *Si* $[(a_1, b_1)] = [(a_2, b_2)]\ \ y\ [(c_1, d_1)] = [(c_2, d_2)]$ *entonces se tiene que:*

I. $[(a_1, b_1)] + [(c_1, d_1)] = [(a_2, b_2)] + [(c_2, d_2)]$

II. $[(a_1, b_1)] \bullet [(c_1, d_1)] = [(a_2, b_2)] \bullet [(c_2, d_2)]$

Lo anterior es independiente de los representantes, ya que si tomamos, por ejemplo, $(-3) + (-2) = -5$, donde los representantes de cada uno son respectivamente $[1,4]$ y $[1,3]$, ahora tomemos como representantes a $[2,5]$ y $[5,7]$, de lo que obtenemos:

$$(-3) + (-2) = [2,5] + [5,7] = [2+5, 5+7] = [7,12] = 7 - 12 = -5$$

De la misma manera se puede realizar para el producto, tomando como ejemplo el anterior para el caso de la multiplicación, es decir, $(-3) \bullet (-2) = 6$, donde los representantes respectivamente son $[1,4]$ y $[1,3]$, tomando como representantes a $[2,5]$ y $[5,7]$, se obtiene lo siguiente:

$$(-3) \bullet (-2) = [2,5] \bullet [5,7] = [(2 \bullet 5 + 5 \bullet 7, 2 \bullet 7 + 5 \bullet 5)] = [10 + 35, 14 + 25]$$
$$= [45,39] = 45 - 39 = 6$$

No se propone que el docente imparta estas definiciones en sus clases, lo relevante es que el docente no desconozca este tipo de definiciones de carácter formal, que resuelven y justifican la razón de que la suma de dos números enteros negativos es la suma de sus valores absolutos y que se obtiene como resultado otro número entero negativo, de la misma manera sirve para explicar las leyes de los signos en el caso del producto.

Teorema 1.3 *$\mathbb{Z}$ Con la suma y producto definidos anteriormente es un anillo conmutativo, en este sentido se cumple que:*

I. La suma es asociativa, conmutativa, tiene neutro y cada elemento tiene opuesto aditivo.
II. El producto es asociativo, conmutativo y tiene neutro; es distributivo con respecto a la suma.

Propiedades de la suma:

i. *Asociativa:* $([a,b]+[c,d])+[e,f]= [a,b]+([c,d]+[e,f])$
ii. *Conmutativa:* $[a,b]+[c,d]= [c,d]+ [a,b]$
iii. *Neutro, es el número entero* $[1,1]$ *usualmente se ve como el 0, así se tiene que :* $[a,b]+[1,1]= [a,b]$
iv. *Opuesto aditivo: El opuesto aditivo de* $[a,b]$ *es el entero*$[b,a]$, *ya que* $[a,b]+[b,a]= [a+b,b+a]= [1,1]$

Propiedades del producto:

i. *Asociativa:* $([a,b]\bullet[c,d])\bullet[e,f]=[a,b]\bullet([c,d]\bullet[e,f])$
ii. *Conmutativa:* $[a,b]\bullet[c,d]=[c,d]\bullet[a,b]$
iii. *Neutro, es el número entero* $[2,1]$, *usualmente lo vemos como 1, así se tiene que* $[a,b]\bullet[2,1]=[a,b]$
iv. *Distributiva:* $[a,b]\bullet\{[x_1,y_1]+[x_2,y_2]\}= [a,b]\bullet [x_1,y_1] + [a,b]\bullet[x_2,y_2]$

De esta manera, se puede establecer que en el conjunto de los números enteros el 0 es el neutro aditivo y el 1 corresponde al neutro multiplicativo. En este sentido si a es un número entero, entonces $-a$ corresponde al opuesto aditivo de a, así se tiene que $(a)+(-a)=(-a)+(a)=0$

Teorema 1.4 *Sean a, b, c, d números enteros, entonces se cumplen las siguientes seis propiedades:*

1) $b - a$ es el único entero que verifica $(b - a) + a = b$, entonces: $x = b - a \leftrightarrow x + a = b$

2) *i*) $a - (b + c) = a - b - c$

   ii) $a - (-b) = a + b$

   iii) $a + (b - c) = a + b - c$

3) $0 \bullet a = 0$ *y* $0 \bullet a = 0$
4) $a \bullet (b - c) = a \bullet b - a \bullet c$
5) $a \bullet (-b) = (-a) \bullet b = -(a \bullet b)$
6) $(-a) \bullet (-b) = a \bullet b$

Teorema 1.5 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ *Se verifican las siguientes propiedades:*

I) Si $a, b \in \mathbb{N} \rightarrow a + b \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad a \bullet b \in \mathbb{N}$

II) $a \in \mathbb{Z} \rightarrow a \in \mathbb{N} \quad \vee \quad a = 0 \quad \vee \quad -a \in \mathbb{Z}$

Definición 1.5 $a, b \in \mathbb{Z}$ *Entonces se tiene que:*$a < b \leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}$

A partir de la definición anterior se establecen las siguientes dos propiedades:

I) $a < b \wedge b < c \leftrightarrow a < c$

II) *Ley de la tricotomía: Para* $a, b \in \mathbb{Z}$ **,** *rige una y solo una de las tres posibilidades* $a < b \vee a = b \vee b < a$

Definición 1.6 *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$*, se tiene que* $a \leq b \leftrightarrow a < b \vee a = b$

Teorema 1.6 *La relación* $\leq$ *es relación de orden total sobre* $\mathbb{Z}$ *respetuosa de la estructura algebraica de* $\mathbb{Z}$ *, es decir;*

I) $x \leq y, \longrightarrow x + z \leq y + z, \ \forall z \in \mathbb{Z}$

II) $x \leq y, \ 0 \leq z \longrightarrow xz \leq yz$

Teorema 1.7 *El orden total $\leq$ en $\mathbb{Z}$ coincide en $\mathbb{N}$ con el orden $\leq$. ($\mathbb{N}$ es el conjunto de los enteros positivos).*

Para el anterior teorema se puede establecer que:

Sean $m = n$, números naturales, entonces se tiene:

$m = n\ \ en\, \mathbb{N}\ \rightarrow m = n\ en\, \mathbb{Z}$

$m < n\ en\ \mathbb{N}\ \rightarrow n = m + p, alg\text{ú}n\ p\ natural\ \rightarrow n - m = p \in \mathbb{N}\ \rightarrow m < n\ en\, \mathbb{Z}$

Además $n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n - 0 = n \in \mathbb{N} \leftrightarrow n > 0$

Se concluye que $\mathbb{N}$ es el conjunto de los positivos o $\mathbb{Z}^+$, es decir, los enteros mayores que cero y negativos o $\mathbb{Z}^-$ corresponde a los enteros menores que cero. De esta manera $\mathbb{Z}$ es la extensión de $\mathbb{N}$. A partir de lo anterior se puede establecer la enumerabilidad del conjunto de los números enteros, es decir, que $\mathbb{Z}$ tiene el mismo "número" de elementos que $\mathbb{N}$.

Los números enteros se pueden representar geométricamente[7] tal y como se presenta en la siguiente figura:

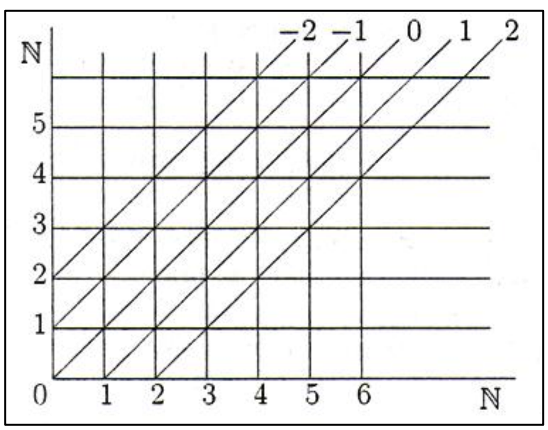


Figura 13. Representación geométrica de los enteros

[7] Tomado de Ortiz, G (2010). Borrador de una propuesta para un curso de teoría de conjuntos y sistemas numéricos. La interpretación gráfica del conjunto de los números enteros se representa geométricamente, donde cada entero es una colección de puntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Para este caso cada entero es una colección de puntos de $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$, sobre una recta que es la bisectriz del cuadrante. Dicha bisectriz contiene la clase 0 , las rectas por encima de ella los enteros negativos, y las rectas del semiplano inferior contiene los enteros positivos. Otra representación del conjunto de los números enteros, que no es precisamente como par ordenado, es mediante la representación directa en un eje o recta numérica, los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda, tal y como se presenta a continuación:

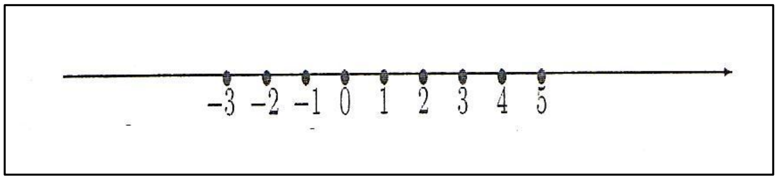


Figura 14. Representación en la recta numérica de los números enteros

Se concluye entonces que $\mathbb{Z}$ es la unión de $\mathbb{N}$ y el conjunto de los enteros negativos, lo cual es un caso particular de la afirmación que la unión de dos conjuntos enumerables es enumerable, caso que se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.8 *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es infinito numerable.*

Demostración:

Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}$ es un conjunto infinito. Consideremos la siguiente función biyectiva:

$$h: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$h(k) = \begin{cases} k/2 & si\ k\ es\ par \\ \frac{-(k+1)}{2} & si\ \ k\ es\ impar \end{cases}$$

Probemos dicho resultado para los seis primeros números naturales:

$h(0) = \frac{0}{2} = 0$ $\qquad$ $h(1) = \frac{-(1+1)}{2} = -1$ $\qquad$ $h(2) = \frac{2}{2} = 1$

$h(3) = \frac{-(3+1)}{2} = -2$ $\qquad h(4) = \frac{4}{2} = 2$ $\qquad h(5) = \frac{-(5+1)}{2} = -3$

El proceso puede continuar, y de esta manera se puede percibir la equipotencia entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. A continuación se presenta el gráfico de correspondencia o de enumerabilidad de los números enteros:

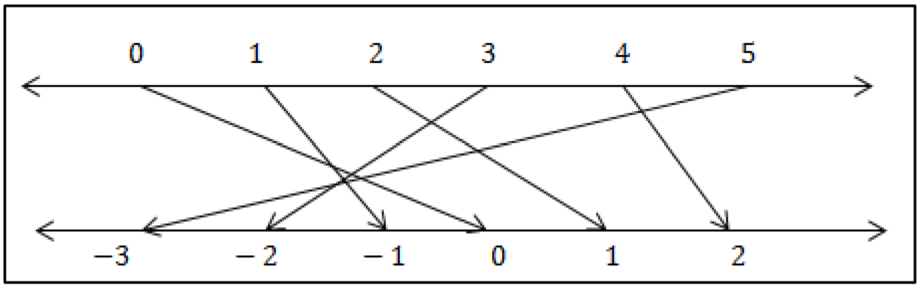


Figura 15. Enumerabilidad de los enteros

A partir del gráfico se puede inferir que los números pares tienen como imagen los números enteros positivos, mientras que los impares a los números enteros negativos.

2.5 Algunas consideraciones finales

Es importante destacar algunos aspectos relevantes para llevar a cabo la propuesta del trabajo, encaminada a analizar el concepto de número entero negativo en dos libros de la Reforma de la Matemática Moderna y dos libros de la matemática actual. En este capítulo se presentaron de manera concisa diferentes dimensiones: histórica, epistemológica y matemática, que están encadenadas para fundamentar el concepto en cuestión.

Desde la perspectiva histórica, se puede observar que desde los sistemas de numeración los primeros indicios del uso del número entero negativo se dieron en los chinos, quienes utilizaban varillas de colores para distinguir los números positivos de los negativos, además la forma de indicar los números negativos fue colocar una varilla en forma diagonal, haciendo alusión a los precios de venta, de compra y los déficits presentes en al área comercial.

El concepto de número ha sido el objeto de discusión en la Historia de las Matemáticas, dicho concepto desde épocas remotas se veía asociado a las técnicas de contar y medir, incluso, el número surge como una necesidad para ordenar, luego para contar o medir. El hombre primitivo comparaba cantidades, acción que da lugar a la identificación y al inicio de la construcción del concepto de número. Sin embargo, esta idea de número asociada al uso de éste en actividades prácticas de las diferentes situaciones de la vida cotidiana rompe con la aparición de la negatividad.

Los números negativos aparecen en occidente en un medio netamente algebraico, relacionado a la solución de ecuaciones, para muchos matemáticos las soluciones negativas de las ecuaciones eran consideradas como ficticias, incluso en muchas de las ocasiones no las consideraban raíces, sólo se atribuía a los números positivos como soluciones, además no se admitían a los negativos como coeficientes de las ecuaciones.

Es interesante ver el uso de la geometría para justificar, por ejemplo, la regla de los signos, aunque se le otorgue la existencia de los números negativos como símbolos independientes en un cálculo numérico. La no relación de este conjunto numérico con actividades como las de contar o medir son las que desatan polémica para la comprensión del uso del número.

Se puede visualizar los diferentes obstáculos que surgen para la aceptación de los números negativos como objeto matemático, entre ellos:

- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas
- Dificultad para unificar la recta real
- Lo real como obstáculo
- El número como expresión de cantidad
- Admitir que a puede representar un número negativo y $-a$ un número positivo
- Los cambios que se producen en la simbología $+a = a$
- La imposición de lo formal como obstáculo

- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural

Es de destacar que en muchas de las ocasiones el docente desconoce este tipo de aspectos históricos y epistemológicos que giran en torno del concepto de número entero negativo, que como se puede observar fue de difícil aceptación por parte de la comunidad de matemáticos, y que de alguna manera se puede establecer que no es fácil la comprensión, debido a los diferentes obstáculos que se presentan alrededor del concepto.

Desde la dimensión matemática se puede observar la construcción del concepto como clases de equivalencias a partir de pares de números naturales, la intención de presentar dicha construcción es la de destacar aspectos matemáticos que de manera formal dan fundamento al concepto de número entero negativo, los teoremas, las propiedades permiten resolver problemas cuantitativos, no solo en las matemáticas sino en cualquier otra disciplina, y más aún en situaciones de la vida cotidiana.

Con respecto a lo anterior, se puede determinar que algunos elementos que son netamente matemáticos son relevantes para la enseñanza. Sin embargo hay que ser cuidadosos ya que en la escuela es muy usual asumir que si $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ indica que el conjunto de los números enteros es "más grande" que el conjunto de los números naturales, enunciado que es falso debido a que el conjunto de los números enteros es enumerable tal y como se observa en el teorema 1.8.

Para el siguiente capítulo, cada uno de los elementos de las dimensiones histórica, epistemológica y matemática son de gran utilidad, pues constituyen el marco conceptual de referencia para poder lograr el análisis de los libros de texto. Primero se presentan aspectos ligados con la dimensión didáctica del concepto de número entero negativo y posteriormente será expuesto el modelo de análisis de contenido y los criterios de selección de los libros de texto de las reformas educativas.

CAPÍTULO 3

3. CARACTERIZACIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO NEGATIVO EN LOS PERIODOS DE LA MATEMÁTICA MODERNA (1960-1980), Y EL DE LA MATEMÁTICA ACTUAL (2003-2013)

Para esta caracterización se seleccionarán dos libros de texto de la Reforma de la Matemática Moderna y dos libros de texto de la Matemática actual, lo que se busca es poder analizar cómo se presenta el concepto de número entero negativo y establecer de alguna manera los obstáculos que se pueden presentar y las diferencias o semejanzas presentes. Para este estudio se optó por implementar el modelo del análisis de contenido propuesto por Rico, L., et al (2008), el cual se fundamenta en analizar la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología para un determinado concepto o tarea matemática.

En primera instancia, se tendrán en cuenta aspectos de tipo didáctico, en lo que respecta a algunos documentos que establecen los usos y las representaciones que se le atribuyen al concepto de número entero negativo. Posteriormente, se consideran aspectos que giran en torno a la reforma de las matemáticas modernas, y finalmente se presenta un modelo de análisis enfocado en los análisis de texto.

3.1 Dimensión Didáctica del Número Entero Negativo

En la escuela, habitualmente, se presentan los conjuntos numéricos de manera secuenciada, iniciando con los números naturales, seguido de los números enteros, posteriormente los números racionales e irracionales para concluir con el conjunto de los números reales.

Desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) se plantea el currículo como un eje articulador de tres componentes, a saber; procesos generales, el contexto y los cinco tipos de pensamiento matemático, éste último se encuentra asociado a un sistema específico, según el tipo de pensamiento, de esta manera se tienen:

- El pensamiento numérico y los sistemas de numeración.
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos.
- El pensamiento métrico y los sistemas de medidas.
- El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.
- El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Dentro del pensamiento numérico y los sistemas de numeración, se plantea el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares (1998), la propuesta curricular va encaminada a desarrollar el pensamiento numérico, como un concepto que incluye el sentido de los números, el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las estimaciones, los órdenes de magnitud entre otros aspectos que potencian y favorecen al desarrollo del pensamiento numérico a partir de los sistemas numéricos.

Los usos y las diferentes interpretaciones que se pueden generar alrededor del concepto de número son varias, en los Lineamientos Curriculares (1998) se presentan los significados y el uso de los números, a saber; como secuencia verbal, para contar, para expresar una cantidad de objetos o como cardinal, para medir, para marcar una posición o como ordinal, como código o símbolo y como una tecla para pulsar. Adicionalmente, para llevar a cabo la comprensión del significado de los números, es importante considerar la estructura, la organización y la regularidad de los sistemas de numeración.

Desde este enfoque, es importante considerar el proceso de evolución del concepto de número, y así mismo poder establecer, en lo posible elementos que indiquen el origen o aparición del número entero negativo, para que facilite, por un lado, la comprensión y uso del número y su contextualización en las clases, y por el otro poder conocer los diferentes aportes que la historia proporciona a los docentes de matemáticas, pues gracias a éstos se pueden establecer los diferentes obstáculos que un objeto matemático pudo generar y sus implicaciones dentro de la enseñanza del mismo.

En muchas ocasiones los libros de texto pueden facilitar la comprensión y la claridad de los conceptos matemáticos, de esta manera, los estudios realizados a nivel de análisis de textos se encuentran proscritos en trabajos como el de Valencia, O. (2010), en él, se identifican los obstáculos didácticos que se presentan en los libros de texto de grado séptimo en relación a la enseñanza de la operación de adición de números enteros.

Para llevar a cabo este análisis se seleccionaron dos libros de texto para establecer el estatus que se le da a los números enteros, las actividades propuestas, para identificar si ellas son generadoras o no de obstáculos en el aprendizaje de la operación. Este trabajo se basa en los procesos de transposición didáctica y los tipos de obstáculos didácticos que pueden ser introducidos en este paso, para ello se han tomado como referencias en la propuesta didáctica sobre los números enteros, realizada por González, et al., (1999)

En el trabajo realizado por Ortega, N. & Castillo, V. (2012) trabajan la compleja problemática en relación a la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, tomando como punto de apoyo autores como, Bruno A., (1997), Cid, (2003), y González, et al., (1999) las cuales reportan errores, dificultades y obstáculos en la construcción de este concepto desde la perspectiva histórica y didáctica. La metodología implementada en este trabajo se desarrolla bajo la aplicación de una secuencia didáctica reformulada, que permitiera introducir el concepto de número entero a partir de números relativos en contextos significativos para estudiantes de grado séptimo. Entre los resultados de implementación y análisis, se encontró que los estudiantes valoran los contextos que permiten la significación de algunos aspectos relacionados con el número negativo, identificándose además, algunas dificultades relacionadas con la representación de cantidades y números enteros en la recta numérica y el concepto de valor absoluto, como objeto matemático.

Por otra parte, Gómez, A. & Sánchez, A. (2008), presentan algunas herramientas de tipo conceptual y curricular que contribuyen al mejoramiento de la enseñanza de los sistemas numéricos en la escuela. Para ello se realiza una reflexión a partir del análisis de fragmentos de textos escolares con el objetivo de encontrar aspectos de tipo curricular o formal presentes en los mismos. Este trabajo está dividido en cinco capítulos, los capítulos dos al cinco, presentan cada conjunto numérico donde se realiza una descripción de aspectos curriculares expedidos por el Ministerio de Educación Nacional o las normas legales vigentes.

Seguidamente se hace una presentación comentada de una construcción formal del sistema numérico en cuestión, privilegiándose los aspectos centrales sin detenerse en los detalles técnicos, con el propósito de resaltar las nociones básicas que permitan capturar la esencia del conjunto. El capítulo tres está dedicado a los números enteros, presentando una construcción moderna, a partir de una relación de equivalencia y realizar las posteriores reflexiones epistemológicas y pedagógicas a partir de los textos de enseñanza.

Ahora bien, una propuesta pedagógica consistente en ir más allá de los procesos técnicos y operativos de los números enteros para develar el entramado conceptual es la presentada por Marín, M. & Ospina, G. (1998). Esta tesis se basa en que los estudiantes tengan un acercamiento formal Al concepto de número entero, a partir de una aproximación a la demostración matemática, sosteniendo que con los números enteros se puede medir una magnitud, dada una referencia y una unidad, y siempre que ésta "esté contenida un número exacto de veces en la magnitud que se ha de medir". Se trata pues de una propuesta pedagógica en la cual los estudiantes desde las estructuras puedan ir afianzando la formación matemática para el futuro.

Finalmente cabe mencionar a Bruno, A.(1997) quien presenta en su trabajo la necesidad de pensar en una visión unitaria de la enseñanza de los números enteros, como algo importante en los momentos en que son introducidos nuevos tipos de números, al realizar las extensiones numéricas. En este trabajo la autora se centra en la manera de hacer la secuencia de extensiones y las formas de realizar la extensión a los negativos, haciendo un contraste con la forma de introducir este concepto en la época de las matemáticas modernas como pares ordenados de números naturales y considerando la relación de equivalencia, y la matemática actual, definidos como los números naturales con signo (positivo y negativo). Este trabajo exhibe los modelos de enseñanza de los números negativos, concluyendo que se consigue mayor comprensión en las representaciones en la recta numérica si se asocian a situaciones reales.

Hasta el momento se ha caracterizado brevemente algunas de las investigaciones centradas en el trabajo sobre la enseñanza de los números enteros negativos, ahora ilustraremos una breve descripción con respecto a la reforma de las matemáticas modernas y el modelo de análisis de texto empleado por Rico, L., et al (2008), como elementos significativos de la dimensión didáctica.

3.1.1 Conceptualización a la Reforma de las Matemáticas Modernas

De acuerdo a la caracterización de Garcia, G. (1996), se tiene que la comunidad de educadores matemáticos se ha enfrentado a varias reformas, en el año 1958 en Europa se desarrolló el famoso seminario de Royamount para prescribir las líneas centrales de una reforma en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria, todo con el fin de involucrar una modernización en la enseñanza de las matemáticas y una adecuación de la fundamentación matemática en el desarrollo científico y tecnológico.

A lo largo del siglo XX, se produjeron dos grandes cambios en el currículo de matemáticas, uno al principio de siglo y el otro en la década de 1960. Según Arrieche, (2002) , entre las motivaciones de los reformadores para llevar a cabo cambios en los currículos se destacan tres, a saber: a) la inconsistencia entre los programas de estudio recomendados y los métodos de enseñanza; b) su puesta en práctica en la actividad escolar; y c) la efectividad de los resultados.

En la enseñanza de las matemáticas hacia finales del siglo XIX, algunos cambios se fueron introduciendo de manera pausada, cuyo énfasis se hacía en temas de aritmética, álgebra elemental, geometría euclidiana y trigonometría. Asimismo, el cambio se fue introduciendo en los métodos de enseñanza, pero los profesores insistían en continuar con las viejas prácticas.

Para llevar a cabo estos cambios, los currículos de matemáticas en la escuela secundaria durante este siglo, se denominaron primera y segunda reforma que son presentadas a continuación con sus respectivas causas que llevaron al fracaso de las mismas.

Primera reforma

Fue Felix Klein el matemático defensor y pionero de esta reforma, para él, la enseñanza de las matemáticas se fundamentaba en desarrollar la imaginación geométrica del alumno y el pensamiento funcional. Esta filosofía sirvió de apoyo para que la comisión proyectara la reforma en el currículo de matemáticas y ciencias, cuya aceptación fue en septiembre de 1905 en Meran. Esta reforma se caracterizó por:

a) El enfoque científico de las materias en las escuelas secundarias
b) Comprensión de los problemas enseñados por parte de los alumnos
c) Capacidad para utilizar los conocimientos matemáticos
d) Relación de las matemáticas con otras áreas.

Con respecto a lo mencionado se puede inferir que esta reforma se basaba en que la enseñanza de las matemáticas tenía un carácter de aplicabilidad, es decir, una matemática de tipo transversal relacionada con otras áreas del conocimiento, asociada a aquello que al estudiante le interesa y la manera en cómo se relaciona esta ciencia ante cualquier situación. Sin embargo, la falta de respaldo por parte de los profesores para el desarrollo de los contenidos programáticos, la depresión económica y las opiniones críticas de algunos matemáticos de la época, como Whitehead, quien rechazó el postulado de eliminar ejercicios de adiestramiento sustituyéndolos por actividades que obliguen al estudiante por utilizar el pensamiento y la comprensión fueron algunas de las causas que llevaron al fracaso definitivo de esta reforma.

Segunda reforma

En la década de 1960 se caracterizó el grupo de matemáticos franceses Bourbaki, quienes dentro de su filosofía afirman que en la nueva enseñanza de las matemáticas, se destaca la noción abstracta de estructura, basada en la teoría de conjuntos y cuya metodología de enseñanza estuvo regida bajo la propuesta de Jean Dieudonné[8], cuyo énfasis se hacía en presentar un sistema deductivo de los contenidos; a partir de axiomas con una presentación y organización estructural sistemática.

De acuerdo a lo anterior Garcia, G. (1996) menciona que:

> […] De estos principios se derivaron orientaciones para fijar los contenidos de la reforma. Los conceptos se presentaron en su versión más abstracta. Se concedió excesiva prioridad al manejo riguroso de la notación simbólica. En lo referente a los contenidos, se privilegió la teoría de conjuntos, la versión axiomatizada del álgebra y la lógica matemática. Por su parte, el objetivo de formación científica y tecnológica determinó que los contenidos de la enseñanza en la secundaria atendieran las necesidades de las matemáticas universitarias.

Se puede observar que en esta segunda reforma las matemáticas sufrieron grandes cambios, que de alguna manera tuvieron su eje central en tres pilares estructurales esenciales; el algebraico, el topológico y el de orden, considerando así a la matemática como un cuerpo único. Además la enseñanza de la matemática debe ser rigurosa y se debe realizar en sistemas bien estructurados.

[8] Es de destacar que Jean Dieudonné, fue un matemático francés y uno de los fundadores del grupo Bourbaki. Hacia finales del siglo XIX, este grupo abandona la idea de escribir un libro de texto para la enseñanza universitaria, dedicándose a elaborar un tratado que contuviera de forma clara y sistemática los teoremas y resultados básicos para todas las teorías existentes en las matemáticas. Dieudonné, sostiene que los matemáticos que más han influido en Bourbaki son Dedekind, Hilbert y la escuela alemana de álgebra. De esta manera el uso sistemático de nuevos conceptos y métodos abstractos son la idea central Bourbaki.

En esta reforma la habilidad para realizar demostraciones matemáticas y argumentar lógicamente fue considerada más importante que la adquisición de técnicas triviales. Sin embargo, Arrieche (2002), sostiene que esta reforma fracasó por varias razones, entre ellas:

- La resistencia de las escuelas secundarias a la introducción de las nuevas metodologías como por ejemplo el empleo de una nueva terminología.
- Alcance poco extenso de esta nueva forma de concebir la matemática a pesar de su aplicación.
- Estas ideas tuvieron bastante aceptación por los profesores de matemáticas, pero en el momento en que eran miradas con escepticismo por la comunidad de matemáticos, como, por ejemplo, el método axiomático y la teoría de conjuntos, como la base de la totalidad de la matemática.

En este sentido, se puede afirmar que la matemática durante la época mencionada presentaba aspectos de tipo formalista y abstracto, cuya complejidad estaba ligada al no ver la relación de esta ciencia con la realidad física, presentada de manera aislada y con gran rigidez, Arrieche, M. (2002) afirma que en esta época se insistía en abandonar los temas de la matemática tradicional para introducir campos tan nuevos como el álgebra abstracta, la topología, la lógica simbólica, la teoría de conjuntos y el álgebra de Boole, por lo que la consigna de la reforma era: "Matemática Moderna".

3.1.2 Reforma de las Matemáticas Modernas en Colombia

Hacia el año de 1942 la Matemática Moderna empieza a presentarse en Colombia a partir de la enseñanza en cursos de profesionalización, cuando el matemático español Francisco Vera dicta el primer curos de teoría de conjuntos en la Sociedad Colombiana de Ingenieros. Como lo menciona Sánchez (2001), hacia el año 1948 llega a Colombia el profesor Carlo Federici, e imparte el primer curso de lógica matemática en la Universidad Nacional de Bogotá. Durante el año 1959 proveniente de Japón llega a Colombia el profesor Yu Takeuchy para difundir la matemática y elaborar textos adecuados para cursos de futuros matemáticos.

Durante el periodo de 1960 y 1985 el movimiento de las Matemáticas Modernas se implementó en nuestro país en los niveles de educación básica y media, reforma en la cual según Gómez, A. (2010) fue un periodo caracterizado por el cambio en los contenidos de los programas, los textos, la metodología, y se asistió a un encuentro con las estructuras, el método axiomático, los conjuntos y los símbolos.

Se puede decir que estos acontecimientos fueron fundamentales para la realización de los cambios curriculares en el bachillerato, Gómez, Al. (2013), menciona que el Decreto 045 de 1962 incluyó en el currículo de matemáticas el concepto de conjunto, dando paso a la gestación de las Matemáticas Modernas en la escuela colombiana. Sin embargo, esta reforma aportó poco a la enseñanza de la matemática moderna, dado que la noción de conjunto apareció como un tema aislado alterando el currículo solamente en el último año.

En el año 1961 del 4 al 9 de diciembre en Bogotá , Colombia, se lleva a cabo la *Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (**CIAEM**), según Ruiz, A & Barrantes, H (2011)[9], fue auspiciada por el ICMI y por la Organización de Estados Americanos OEA, participaron matemáticos y profesores de matemáticas, representantes e invitados de 23 países americanos; algunos de ellos así como distinguidos matemáticos europeos fueron invitados a disertar sobre las matemáticas modernas , los problemas de su enseñanza y su divulgación.

El objetivo de la I CIAEM, fue explorar los métodos de enseñanza de secundaria y universitaria, con la intención de extender a los países latinoamericanos la reforma que se estaba dando en la enseñanza de las matemáticas en países europeos y en los Estados Unidos. Dicha reforma tendía a cambiar los planes de estudio de las matemáticas que se impartían en la enseñanza media, la idea central era darle la

[9] Este documento se titula: En los orígenes del CIAEM en el que se describe el contexto histórico del surgimiento del Comité Interamericano de Educación Matemática, dominado por la reforma de las matemáticas modernas, presentando el contexto general de la reforma y las características propias de América Latina.

unidad a las matemáticas utilizando como conceptos fundamentales los de conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, así como las estructuras fundamentales como grupos, anillos y cuerpos.

En el año 1968 el Instituto Colombiano de Pedagogía ICOLPE asesoró al MEN para el diseño de programas en la enseñanza primaria, para ello se utilizaron libros de matemáticas donde se empleaban conceptos intuitivos de conjunto. En el año 1969 son creados los institutos de Educación Media diversificada INEM que contaba con un currículo unificado para sus instituciones. En estos institutos se presenta una reforma unificada influenciada por la *Segunda Conferencia Interamericana de Educación Matemática* realizada en Lima, Perú, del 5 al 12 de diciembre en 1966, allí se introduce en el ciclo básico y en el ciclo diversificado los conceptos de estructura, operaciones, sistemas de numeración, conjuntos y deducciones lógicas (Vasco, 1975) (citado en Gómez, Al., 2013).

De acuerdo a lo anterior, Ruiz, A & Barrantes, H (2011), afirman que el eje central de esta segunda conferencia o segunda CIAEM, que estuvo dirigida por Marshall H. Stone, era analizar el avance de la Reforma de la Matemática Moderna que se impulsó en la primer conferencia de 1961. La mayoría de delegados expusieron los problemas que se encontraron, entre ellos, y por mencionar algunos, eran problemas eran comunes a la mayoría de los países, tales como las dificultades en la formación o capacitación del profesorado y las escasas posibilidades en cada país tanto desde el punto de vista de los recursos humanos como los económicos y operativos para llevar a cabo con éxito la reforma.

Finalmente se puede visualizar que todos estos acontecimientos indican el camino para la enseñanza de las matemáticas modernas, aunque es la resolución 277 de 1975 la que legaliza la implementación de la matemática moderna en el bachillerato colombiano, tal y como lo cita Gómez, Al. (2013):

> […] Adóptense los programas de estudio elaborados en 1974, en desarrollo del decreto 080 del mismo año y las resoluciones reglemantarias correspondientes a las modalidades del bachillerato académico, industrial, agropecuario, comercial,

normalista y promoción social para las áreas de matemáticas, estudios sociales, ciencias, idiomas, educación estética y educación física.

Sin embargo la implementación de la reforma presentó muchas dificultades ya que se carecía de la fundamentación para la comprensión de estos nuevos cambios. Así la era de la matemática moderna no trascendió con éxito en algunas regiones del país, por lo que el Gobierno Nacional de acuerdo al artículo 78 de la Ley General de la Educación elabora los Lineamientos Curriculares que son publicados en 1998 para algunas áreas obligatorias, entre ellas la matemática.

3.1.3 Un modelo para el análisis de textos

Las propuestas para llevar a cabo un análisis de textos en matemáticas son variadas, muchas encaminadas a examinar lo curricular, lo afectivo, lo semiótico, entre otros. Para efectos de este trabajo, enfocado a analizar la manera en que es presentado el concepto del número entero negativo, Rico, L., et al (2008) proponen un análisis de texto, desde la perspectiva histórica y epistemológica basada en la técnica denominada análisis de contenido.

Esta técnica es una herramienta destinada para establecer y estudiar la diversidad de significados de los conceptos matemáticos. Propone analizar la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología, además el papel que juega el contexto numérico para un determinado concepto o tarea matemática. A continuación se especifican cada uno de los ejes mencionados para llevar el análisis de contenido de manera histórica y epistemológica:

- **La estructura conceptual:** se consideran por un lado, aspectos del conocimiento conceptual, como hechos, conceptos y estructuras. Los *hechos* constituyen el nivel básico de complejidad conceptual y se pueden diferenciar términos, notaciones, convenios o resultados. En un nivel medio de complejidad están los *conceptos* que pueden tener diferentes significados, y en un nivel de complejidad superior se encuentran las *estructuras*. Por el otro lado se encuentra el conocimiento procedimental, como son las destrezas (jerarquía de operaciones o algoritmos), los razonamientos y estrategias.

- **Los sistemas de representación:** expresan los modos de hacer presentes un objeto, concepto o idea y contemplan para ello símbolos, signos, gráficos y materiales físicos. Los modos de representar nociones matemáticas destacan las propiedades de los conceptos y procedimientos. Los modos de representación muestran objetos que forman parte de una estructura, se presentan organizados en sistemas. Por ejemplo:

  $$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (3)(5) = 4^2 - 1 = (4 + 1)(4 - 1)$$

  Como se puede observar en el ejemplo, se presentan algunas maneras en las que se puede representar un mismo concepto matemático en diferentes formas, que en últimas permite la caracterización del significado, contribuyendo a la comprensión de conceptos y procedimientos. No hay jerarquía en los sistemas de representación, pues cada uno de ellos permite resaltar aspectos particulares de los conceptos y sus relaciones. Lo sistemas de representación más usuales son el verbal, el gráfico y el simbólico.

- **Campo fenomenológico**: Se consideran las situaciones relacionadas con la aplicación de la estructura en estudio, y la delimitación de los distintos contextos en que aparecen. De este modo, se analizan los usos dados a los conceptos y a la estructura establecida de objeto de análisis. Desde este campo, el pensamiento matemático surge de los fenómenos y las estructuras matemáticas abstraen y organizan grandes familias de fenómenos del mundo natural, social y mental.

  Por lo anterior, lo que se busca en esta dimensión de análisis es encontrar el sentido con que se utilizan estructuras y conceptos, los modos en que se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas. En últimas se busca desde el campo fenomenológico la vinculación de conceptos y estructuras con aspectos asociados a la vida real, presentados en las diversas actividades que proponen los libros de texto.

Desde esta perspectiva, el análisis fenomenológico de una estructura matemática permite considerar las situaciones en las que ésta tiene funcionalidad. Dichas situaciones se dividen en:

I. *Situaciones personales:* son las actividades diarias de los estudiantes. Se refiere a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Estas situaciones están relacionadas con prácticas cotidianas e involucran conceptos básicos de las matemáticas.
II. *Situaciones educativas, ocupacionales o laborales:* son las actividades relacionadas con el entorno escolar o en un entorno de trabajo. El mundo de trabajo incluye el conocimiento de horarios, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones, la administración del tiempo y del dinero.
III. *Situaciones públicas:* desde esta dimensión se considera a la comunidad local en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entrono o que aparezcan en los medios de comunicación, pues los estudiantes deben estar en capacidad de analizar, interpretar y evaluar información numérica que se presente en los medios de comunicación, además se debe también tener domino del sentido del número y las operaciones básicas.
IV. *Situaciones científicas:* son de tipo abstracto e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. El dominio de los distintos conjuntos numéricos juntos con las estructuras matemáticas del análisis y del álgebra constituyen el marco conceptual donde se sitúan las aplicaciones y usos numéricos más avanzados.

Para llevar a cabo dicha revisión es importante resaltar el conjunto de situaciones en las que el concepto y la estructura se utilizan, es decir, el contexto numérico.

- **Contextos numéricos**: Los contextos numéricos hacen referencia al modo en que se usan los conceptos en una o varias situaciones. A continuación se presentan los seis tipos de contextos numéricos que se pueden presentar en las diferentes formas de presentar un concepto matemático:

  Contar: para este caso la utilidad consiste en asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección.

  Cardinal: hace referencia a la cuantificación de objetos de un conjunto. Es algunos casos se determina un cardinal a partir de la aplicación de operaciones. En otros casos se determina un cardinal cuando se aplica un procedimiento combinatorio o algoritmo elemental, o aplicando fórmulas sumatorias o factoriales.

  Medida: se refiere a la cantidad de unidades de alguna magnitud continua. Un tipo específico de problemas en este contexto surge cuando se pretende obtener longitudes, superficies u otras magnitudes.

  Ordinal: Corresponde conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado. Cualquier problema numérico que requiera un orden natural pertenece en este contexto.

  Operacional: Las acciones de agregar, separar, retirar y repartir expresan multitud de acciones sobre y transformaciones de los objetos; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación. De este contexto se hace alusión a las operaciones aritméticas básicas.

  Simbólico: en este contexto los números son utilizados para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, como por ejemplo el número en un contexto de codificación.

A continuación se presenta la siguiente tabla que relaciona y presenta de manera sintetizada los componentes de análisis de un libro de texto a partir de la técnica denominada análisis de contenido propuesta por Rico, L., et al (2008):

Análisis de contenido				
Estructura conceptual		**Sistemas de representación**	**Campo fenomenológico**	**Contextos numéricos**
Conocimiento conceptual	Conocimiento procedimental	Modo de hacer presente un objeto, concepto o idea, entre ellos: I. Verbal II. Gráfico III. Simbólico	Actividades o situaciones que son propuestas en los libros de texto, éstas pueden ser: I. Personales II. Educativas III. Públicas IV. Científicas	Modos en que es presentado el concepto de número: I. Contar II. Cardinal III. Medida IV. Ordinal V. Operacional VI. Simbólico
I. Hechos II. Conceptos III. Estructuras	I. Destrezas II. Razonamientos III. Estrategias			

Tabla 1. Modelo de análisis de contenido.

Finalizamos este aparte recalcando que este modelo de análisis se aplicará en el siguiente capítulo, en dos libros de texto dentro del periodo de la Reforma de la Matemática Moderna y dos libros de texto de la matemática actual, considerando la adecuación o los ajustes pertinentes a partir de las necesidades propias del trabajo que más adelante será expuesta.

3.2 Presentación de los textos seleccionados en el periodo de las Matemáticas Modernas. Criterios de selección

Para la década de los sesenta, según Vasco (2002)[10] en los programas antiguos de 1937 para la primaria, y en los de 1951y 1962 para el bachillerato el sistema de

[10] Vasco (2002). *Seminario sobre estándares curriculares en Colombia*. ¿Objetivos, logros, indicadores, competencias o estándares? En este documento Carlos Vasco presenta un recorrido histórico de las diferentes reformas educativas en Colombia, partiendo de la problemática actual de los docentes con referencia a la evaluación del progreso de los estudiantes.

evaluación estaba basado en considerar los contenidos. Más tarde, en la década de los sesenta se resolvió que había que cambiar la evaluación por contenidos, por la evaluación por objetivos, todo ello gracias al Decreto 1710 de 1964 para la primaria y el Decreto 080 de 1974 para la secundaria.

El periodo de legislación del Decreto 080 inicia en 1974 hasta 1983, cuyo énfasis determinaba implementar un plan fundamental mínimo de estudios, basado en la flexibilidad de los planes de estudio, permitiendo su ajuste de acuerdo a las diferentes modalidades existentes: humanística, científica y técnica.

Para el área de matemáticas, se presentaba el carácter conjuntista, lógico y axiomático de los conceptos, partiendo de ideas abstractas y poco relacionadas con la vida cotidiana. De acuerdo al Artículo 4° del Decreto 080 de 1974 del Ministerio de Educación Nacional, para los grados I, II, III y IV de la educación media la intensidad horaria era de cinco horas semanales, mientras que para los grados V y VI la intensidad horaria era de tres horas a la semana.

Según Sánchez (2001) en la década de los años 1960, empezaron a aparecer los primeros libros y documentos escritos por colombianos, en su mayoría sobre lógica o teoría de conjuntos para ser adaptados a la enseñanza según los nuevos planes de estudio. Entre ellos se destacan los siguientes:

- Alberto Campos Sánchez, 1964, Introducción a “La description de la mathématique formelle” de N. Bourbaki. *Revista de Matemáticas Elementales*. Monografías Matemáticas, No 2. Universidad Nacional de Colombia / SCM. 54 páginas.
- Alonso Takahashi, Conjuntos (Apéndice). Folleto, tamaño carta, firmado por el autor. c.1965. No contiene bibliografía. 28 páginas.
- Alonso Takahashi, Una presentación de la teoría de clases. Folleto, firmado por el autor c.1965. No contiene bibliografía. 16 páginas.
- Rafael Mariño, 1966, Fundamentos de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. No contiene bibliografía. 133 páginas.

- Clara Helena Sánchez & Fabiola Rodríguez, 1970, Guías para la enseñanza de la matemática en bachillerato, Primer libro, Elementos de la teoría de conjuntos, CIAS. No contiene bibliografía. 81 páginas tamaño oficio.
- Álvaro Pinzón, 1973, Conjuntos y Estructuras, Colección Harper, Editorial Tec-Cien Ltda. 356 páginas.

Como se puede observar en el listado de algunos de los libros y/o documentos de algunos colombianos, el título de éstos está enfocado hacia la teoría de conjuntos y estructuras que es el pilar para esta reforma educativa que regía en Colombia desde 1974 hasta 1983. Sin embargo, Ruiz, A & Barrantes, H (2011) presentan que la reforma respondía a una realidad: existía una amplia necesidad de modernizar la enseñanza de las matemáticas y, especialmente, se daba una gran separación de las matemáticas universitarias y las preuniversitarias.

La modernización arrancaba de la necesidad de adecuar la formación matemática al desarrollo científico y tecnológico de las principales sociedades occidentales, así como también a ciertas condiciones históricas y políticas. La iniciativa de la reforma provino de fuera, primeramente se recibieron los libros de texto del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares de los Estados Unidos y la influencia del School Mathematics Group (SMSG) dirigido por E.G. Begle del mismo país, quienes se encargaron de la realización de la *Primera Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, en Bogotá en 1961. El objetivo era contar con representantes de todos los países del continente, para elaborar o traducir textos, cambiar currículo, entrenar profesores, entre otros aspectos, tal y como se estaba haciendo en Europa y en los Estados Unidos (Ruiz, A & Barrantes, H , 2011).

3.2.1 Un libro de la SMSG: Matemáticas Modernas para escuelas secundarias

Es importante resaltar, como ya se mencionó, que en América Latina la influencia de Estados Unidos por parte del grupo de la SMSG y del Grupo de Estudio de las Matemáticas escolares fue relevante, de este modo se presenta en primera instancia un libro con fuerte influencia durante la época de matemática moderna, pero que no se le aplicará la rejilla de análisis, puesto que este libro fue la vía de transición al Decreto 080 de 1974 que legaliza la matemática moderna en el currículo de Colombia. Sin embargo, se presentará un breve análisis de cómo es introducido el concepto de número entero negativo.

A continuación se presentan las características principales del libro de texto y la portad del mismo:

Nombre del libro: Matemáticas modernas para escuelas secundarias Libro 1 **Autores:** Mary P. Dolciani William Wooton Edwin F. Beckenbach William G. Chinn **Editorial:** Publicaciones Cultural S.A **Edición**: Primera –Cuarta reimpresión **Año de publicación:** 1970 **País:** México

Tabla 2. Información del libro de texto

El libro de texto se caracteriza por presentar una breve descripción acerca de los cuatro autores[11] y de los consejeros editoriales que contribuyeron a la elaboración del mismo, también presenta los reconocimientos que hacen los autores hacia sus colegas y estudiantes por sus comentarios, y un listado de fotografías que suministra el libro en algunas situaciones presentes en ciertas páginas y una lista de símbolos para contextualizar al lector. A continuación se presenta la portada del libro:

[11] Es importante destacar algunos aspectos relevantes de los autores del libro, por mencionar:

- Mary P. Dolciani (1923-1985): Fue una gran matemática y educadora estadounidense. Autora principal de libros de texto a nivel universitario y de secundaria que publicó bajo su nombre, denominados ***estructura y método***. Además de la enseñanza de las matemáticas puras, destacó la importancia de la aplicabilidad del álgebra.
- William G. Chinn (1919-2004): Matemático de la Universidad de California. Después de la segunda guerra mundial empezó a trabajar como profesor para el sistema de escuelas públicas, tanto para la secundaria como para la preparatoria. Publicó numerosos artículos y fue coautor de varios libros de texto, incluyendo el de las matemáticas modernas.

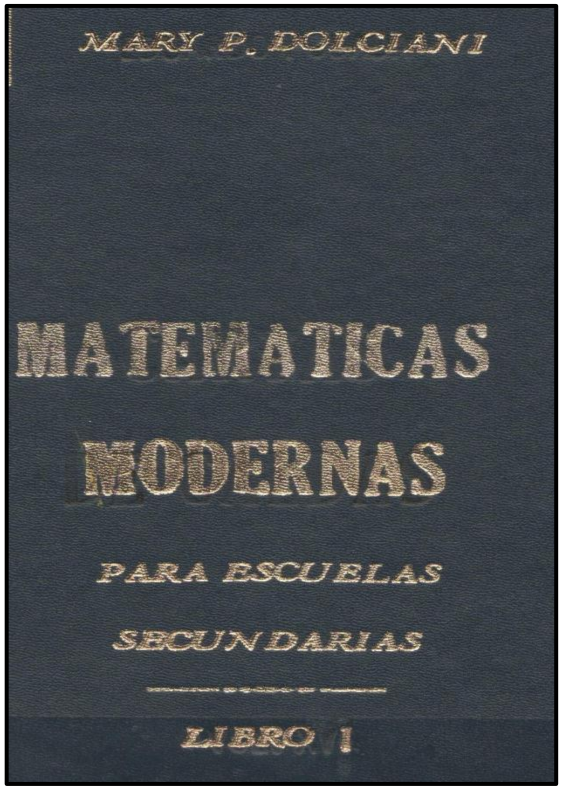


Figura 16. Portada del libro: Matemáticas Modernas para Escuelas Secundarias

El libro se encuentra divido en trece temas o capítulos haciendo énfasis en los conjuntos, las propiedades y los algoritmos, al inicio se presenta una introducción que se basa en la formulación de problemas y repaso de operaciones en aritmética, pues el libro a modo de sugerencia justifica la importancia de comprender a fondo esta rama. De acuerdo a la tabla de contenido que propone el libro de texto el concepto de número entero es presentado en el último tema en la página 499, denominado extensión del conjunto de los enteros, en la siguiente figura se puede apreciar el fragmento de la tabla de contenido donde se puede observar la unidad que será objeto de análisis:

14\. EXTENSIÓN DEL CONJUNTO DE LOS ENTEROS 499

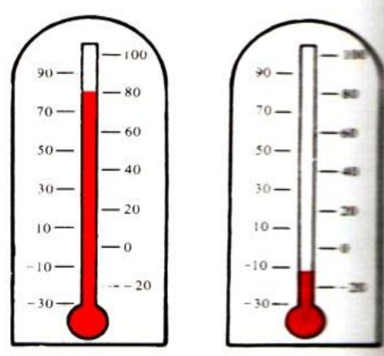
Figura 17. Fragmento de la tabla de contenido

En un inicio el libro presenta al conjunto de los números enteros como coordenadas, introduciendo el termómetro que tiene una escala con dos sentidos, para leer temperaturas sobre y bajo cero, además se hace alusión a los sentidos opuestos con situaciones de la vida, tal y como se presenta en la siguiente figura:

14-1 Números negativos como coordenadas

Sentidos opuestos. El termómetro tiene una escala con dos sentidos donde es posible leer temperaturas *sobre* cero y temperaturas *bajo* cero. Al llevar su contabilidad, el hombre de negocios también hace uso de una escala con dos sentidos, uno para sus *pérdidas* y otro para sus *ganancias*.

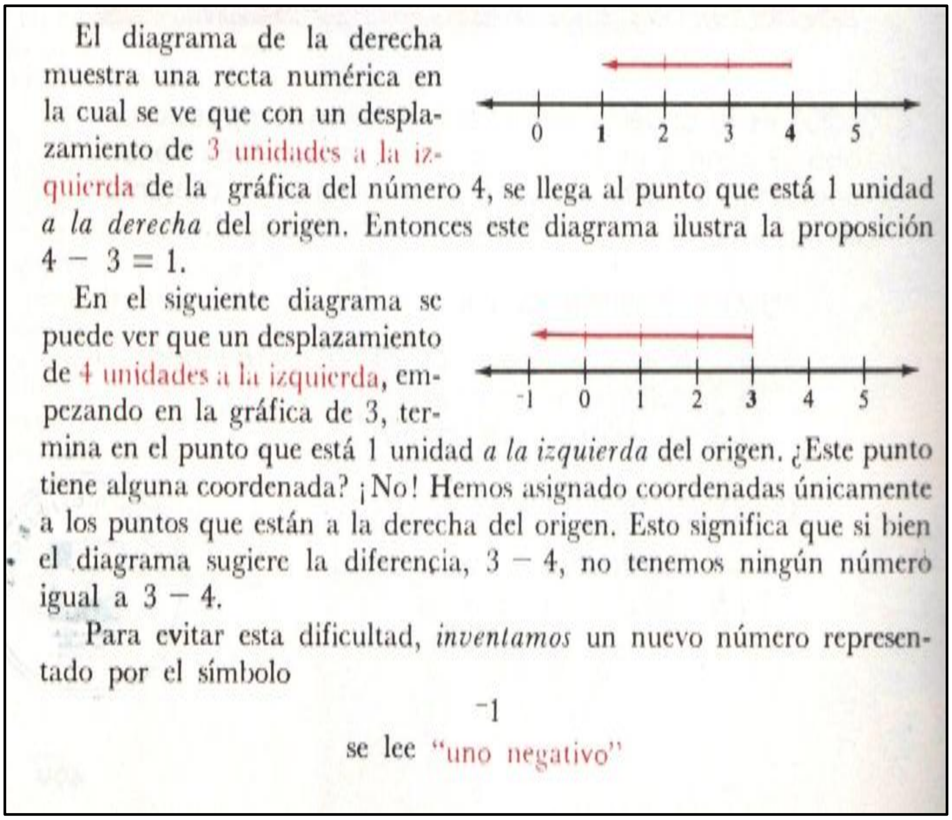
En muchas ideas con las cuales estamos familiarizados intervienen mediciones en "sentidos opuestos". Vea si puede decir el opuesto de cada una de las siguientes ideas.



1. 17m bajo el nivel del mar
2. Un excedente de $4
3. 12° longitud este
4. 25 años d. C.
5. Un depósito de $56 en el banco
6. Una pérdida de $100
7. 3 km al norte
8. Una ganancia de $5 000
9. 10 yardas perdidas en fútbol americano
10. Un aumento de $50 en el salario semanal.

Figura 18. Números negativos como coordenadas

Más adelante en la misma página se presenta el concepto como desplazamientos sobre la recta numérica, induciendo a la operación suma de enteros, sin embargo es interesante la connotación que utilizan para aludir al número negativo, indicando que la diferencia entre $\mathbf{4-3}$ es posible y cuyo resultado es $\mathbf{1}$, pero la "diferencia" entre $\mathbf{3-4=-1}$, el cual da como resultado un número entero negativo, afirman que para ubicarlo en la recta se han "inventado" un nuevo número que son los negativos, como lo indica la figura 19.



El diagrama de la derecha muestra una recta numérica en la cual se ve que con un desplazamiento de 3 unidades a la izquierda de la gráfica del número 4, se llega al punto que está 1 unidad *a la derecha* del origen. Entonces este diagrama ilustra la proposición 4 − 3 = 1.

En el siguiente diagrama se puede ver que un desplazamiento de 4 unidades a la izquierda, empezando en la gráfica de 3, termina en el punto que está 1 unidad *a la izquierda* del origen. ¿Este punto tiene alguna coordenada? ¡No! Hemos asignado coordenadas únicamente a los puntos que están a la derecha del origen. Esto significa que si bien el diagrama sugiere la diferencia, 3 − 4, no tenemos ningún número igual a 3 − 4.

Para evitar esta dificultad, *inventamos* un nuevo número representado por el símbolo

$$^{-}1$$

se lee "uno negativo"

Figura 19. Números enteros en la recta numérica

En la página 501 del libro se formaliza el concepto de número entero en la recta numérica, determinando a los números "inventados" o negativos como los que se encuentran a la izquierda del cero u origen. Además a la recta numérica la denominan diagrama y es la que permite dar orden a los enteros, como se puede apreciar en la figura 20, mientras que en la figura 21 se presenta al conjunto de enteros como agrupamiento de pares de números opuestos:

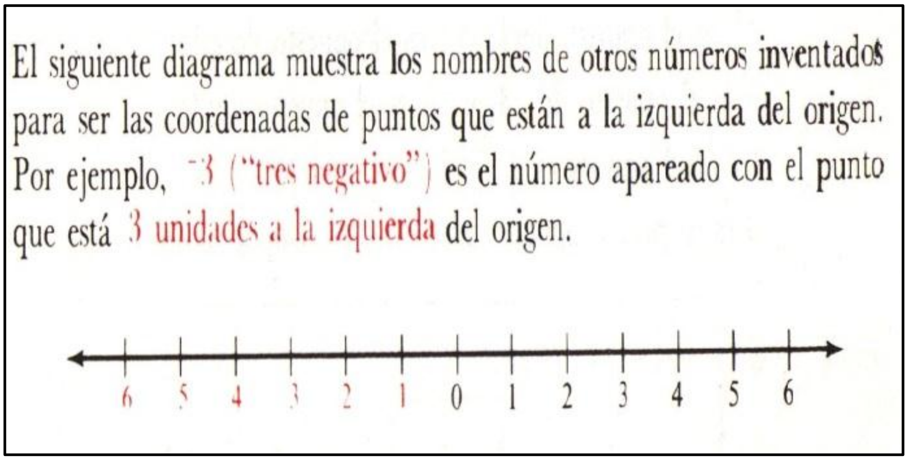

El siguiente diagrama muestra los nombres de otros números inventados para ser las coordenadas de puntos que están a la izquierda del origen. Por ejemplo, $^{-}3$ ("tres negativo") es el número apareado con el punto que está 3 unidades a la izquierda del origen.

Figura 20. Diagrama de números enteros

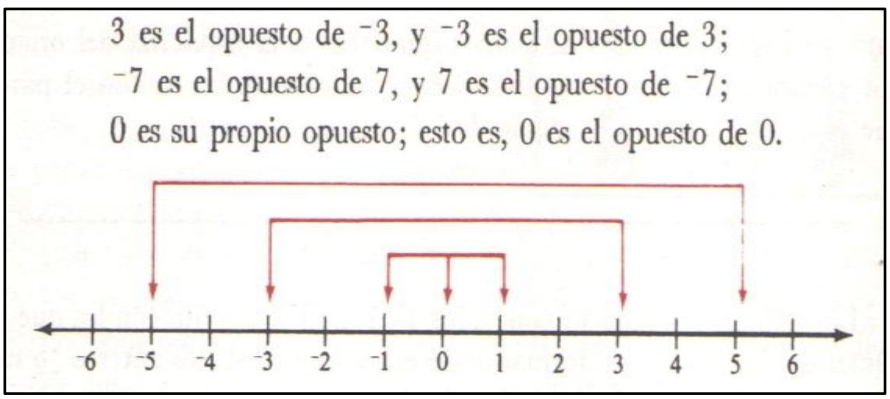

3 es el opuesto de $^{-}3$, y $^{-}3$ es el opuesto de 3;
$^{-}7$ es el opuesto de 7, y 7 es el opuesto de $^{-}7$;
0 es su propio opuesto; esto es, 0 es el opuesto de 0.

Figura 21. Números enteros- Números opuestos

En las páginas 503 y 504 del texto se presentan una serie de ejercicios que involucran la ubicación de puntos en la recta numérica, resolución de ecuaciones y simplificación de operaciones. Después se introducen las operaciones suma, resta, multiplicación y división que no son objeto de análisis en este trabajo.

A modo general se puede ver que el libro de texto presenta en primera instancia, al conjunto de los números enteros dándole una contextualización a partir del uso del termómetro para presentar a los números negativos como sentidos opuestos, además de algunas situaciones que se enuncian y que tienen que ver con el aumento o disminución de cantidades, ganancias o pérdidas de dinero. Luego se presenta la recta numérica para el desplazamiento de unidades enteras, donde se da cabida a los números negativos o números inventados como lo afirman los autores del libro. Y finalmente se formaliza el concepto indicando que los números naturales en unión con los números negativos forman el conjunto de los números enteros. Además se hace la especificación de la equivalencia de que los símbolos $+1$, $+2, +3, \ldots$. Se usan, algunas veces, para representar a los números positivos $1,2,3$.

3.2.2 *Libros de texto en Colombia: periodo de las matemáticas modernas*

Los libros de texto en Colombia son de diversas editoriales unas más vendidas que otras, pero quizá con el mismo objetivo: instruir en el aprendizaje. Durante la época de la matemática moderna se tuvo gran variedad en cuanto a los libros de texto, sin embargo, el criterio de selección de los libros de dicha época se fundamenta en Soto (2012)[12], quien realiza un análisis de textos de ciencias sociales, afirmando que los libros más difundidos durante el período de 1974 hasta 1983 que corresponde a la fecha de legislación del Decreto 080, donde es implementado al currículo de matemáticas las matemáticas modernas, fueron las editoriales Norma considerada como una de las más reconocidas en Colombia por su desarrollo y comercialización, y la editorial Bedout considerada como una empresa familiar cuyo origen se remota en la ciudad de Medellín que conquistó el mercado nacional.

Otro criterio de selección se argumenta porque la portada de los libros hace alusión a las matemáticas modernas, además se explicita en el libro de la editorial Bedout que se adecúa al desarrollo de programa del Ministerio de Educación Nacional partiendo del Decreto 080 de 1974 y la Resolución 277 de 1975. A continuación se presentan los dos libros de texto seleccionados para llevar a cabo el análisis

[12] Soto (2012). La independencia americana: textos e imaginarios escolares en Colombia. En este documento la autora presenta un análisis de textos de ciencias sociales en épocas específicas, partiendo de la legislación colombiana y tomando como referencia periodos de 1974 hasta 2010.

respectivo que se aplicará en el siguiente capítulo exhibiendo la portada, los autores y las unidades que serán objeto de análisis.

3.2.2.1 Descripción del libro: Serie Matemática Moderna II (1972)

Este libro es el segundo de la *Serie Matemática Moderna* para el nivel secundario, está enfocado a estimular los conceptos básicos y la estructura de la matemática, además busca desarrollar la destreza en el manejo de técnicas para la solución de problemas. En la siguiente tabla se aprecia los datos del libro con sus respectivos autores[13]:

Nombre del libro: Serie Matemática Moderna II
Autores: Robert E. Eicholz
Phares G. O´Daffer
Charles F. Brumfiel
Merril E. Shanks
Charles R. Fleenor
Editorial: Norma
Edición: primera
Año de publicación: 1972
País: Cali- Colombia

Tabla 3. Información libro de texto: Serie Matemática Moderna II

El libro hace hincapié a que el estudiante desarrolle habilidad matemática, pero también a que conozca el por qué son válidos ciertos procedimientos y cuándo y

[13] A continuación se destacan algunos datos de los autores del libro:

- Phares O'Daffer: recibió su licenciatura y maestría en la Universidad Estatal de Illinois y estudió en la Universidad de Iowa y la Universidad de Michigan antes de recibir su doctorado en educación matemática de la Universidad de Illinois. Fue coautor de vrias series de libros de texto de matemáticas. También es autor de varios artículos en revistas especializadas de matemáticas.
- Merril E. Shanks: En 1946 recibe el nombramiento conjunto en matemáticas e ingeniería aeronaútica. Hizo muchas contribuciones a la preparación de cursos en la aerodinámica, y supervisó tesis en matemática pura, así como en la ingeniería aeronáutica.

dónde deben emplearse. Lo más importante es aprender a resolver y plantear problemas.

La serie de matemática moderna estimula a la adquisición de una conciencia que facilite la solución racional de problemas concretos. La serie consta de los siguientes libros para el alumno:

- Matemática I
- Matemática II
- Matemática III, Álgebra
- Matemática IV, Geometría

A continuación se presenta la portada y el fragmento de la tabla de contenido del libro que será objeto de análisis:

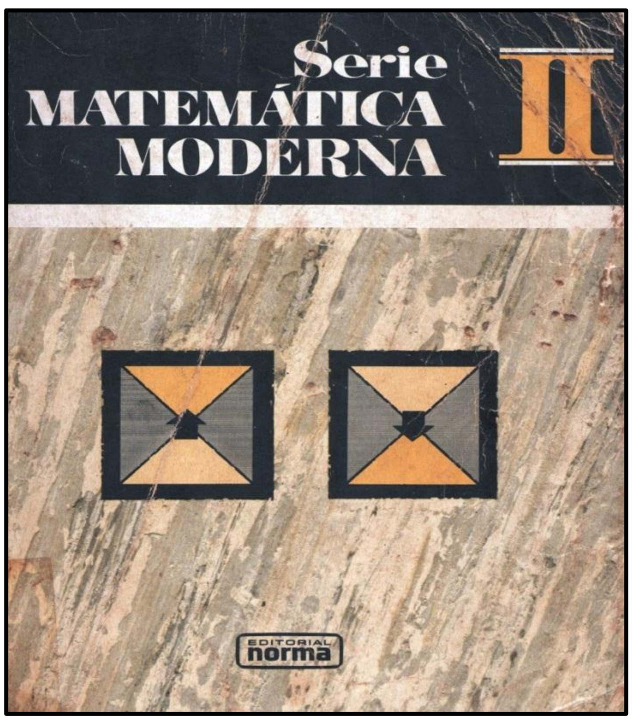


Figura 22. Portada del libro Serie Matemática Moderna II

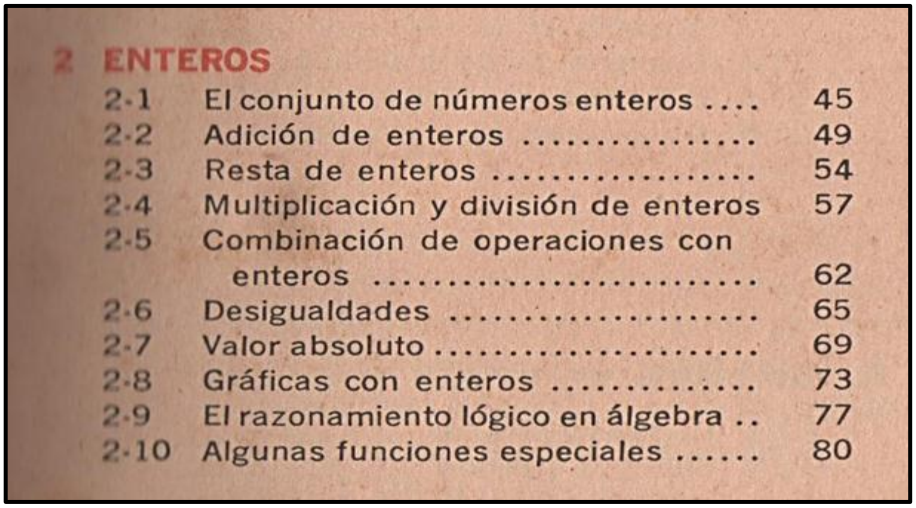


Figura 23. Índice de materias

El libro está dividido en doce ejes temáticos iniciando con números cardinales y culminando con Geometría: círculos, esferas, cilndros y conos. Es de destacar que al finalizar cada unidad temática el libro presenta un repaso de la unidad el cual incluye los conceptos fundamentales, una lista de vocabulario y una serie de ejercicios de los visto en la unidad.

La unidad que será objeto de análisis es la 2, la cual se denomina: **Enteros**. Es una unidad que se dedica al conjunto de los números enteros, trabajando las operaciones, las desigualdades, el valor absoluto, y el razonamiento lógico en álgebra. Esta unidad se encuentra en la página 45 del libro de texto.

3.2.2.2 Descripción del libro: Fundamentos de Matemática Superior Moderna (1977)

En esta sección se presenta el libro de texto perteneciente a un solo autor[14] , con sus características principales y detalles de tipo general e informativo:

[14] Gustavo Patiño Duque: Ingeniero de la Universidad de Los Andes, con especialización en la Universidad de Wageningen, Holanda, y en la Illinois, en E. U. Otra especialización en la Universidad Bolivariana. Autor de: Elementos de matemáticas, 1963. Trigonometría plana y esférica. Álgebra y geometría, 1963. Demografía y desarrollo, 1968

Nombre del libro: Fundamentos de Matemática Superior Moderna **Autores:** Gustavo Patiño Duque **Editorial:** Bedout S.A**.** **Edición:** Tercera **Año de publicación:** 1977 **País:** Medellín- Colombia

Tabla 4. Información del libro de texto: Fundamentos de matemática superior moderna II

De manera general el libro va dirigido para los cursos 5° y 6° de la enseñanza media[15]. Contiene lógica, conjuntos, trigonometría, geometría analítica y cálculo diferencial e integral. El libro se divide en dieciséis unidades iniciando en la unidad I con lógica matemática y culminando en la unidad XVI con cálculo integral.

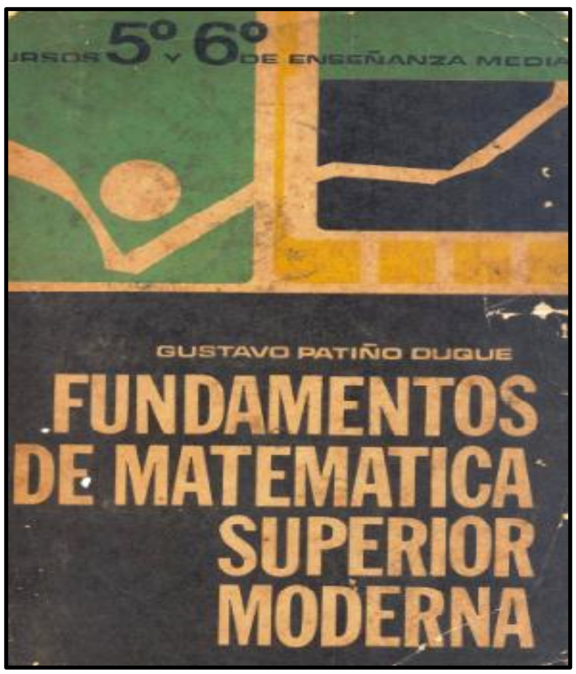


Figura 24. Portada del libro de texto: Fundamentos de matemática superior moderna

[15] En la introducción del libro se especifica que de acuerdo a las exigencias del cambio curricular propuestos por el MEN, el libro de texto es una unificación de los grados quinto y sexto de educación media. De esta manera las unidades 1 y 2 del programa de quinto y la número 1 del de sexto tratan de la lógica matemática y la teoría de conjuntos, para más adelante entrar en el campo de los grupos y cuerpos.

Figura 25. Tabla de contenido

A partir de la anterior figura se puede ver que la unidad que será objeto de estudio es la unidad III, la cual se denomina: Conjuntos numéricos; presente en la página 62 del texto, iniciando con el conjunto de los números naturales, seguido por los números enteros y racionales y, posteriormente, se presenta a los números reales y se concluye con los números complejos.

A partir de dichos conjuntos numéricos se introducen las leyes o las propiedades del conjunto de los números reales, además en esta unidad se trabaja la clase de residuos de los enteros módulo m y la inducción matemática.

De acuerdo a lo anterior es en la unidad III, denominada conjuntos numéricos donde se encuentra el conjunto de números enteros que será analizado utilizando la rejilla de análisis en el siguiente capítulo.

3.3 Presentación de los textos seleccionados en el periodo de las Matemáticas Actuales

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias (2006) es necesario ampliar la visión sobre los textos escolares y las directivas ministeriales como los únicos medios para hacer explícitas las exigencias del cambio en la educación. Se trata de hacer un análisis crítico con respecto a la selección de la amplia oferta de textos escolares que se encuentran en el mercado, de tal forma que los docentes deben estar atentos de la pertinencia, concordancia y coherencia de éstos con los fines de la educación y las políticas del sistema educativo, en particular con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias.

Con respecto a lo anterior en el portal Colombia Aprende se presenta que los textos se están renovando con propuestas pedagógicas basadas en los estándares de calidad y en las competencias que deben desarrollar los estudiantes desde preescolar hasta grado once. De esta manera, el criterio de selección para los libros que serán objeto de análisis son los de mayor comercialización en el mercado, siendo la editorial Norma y Santillana de acuerdo con el portal Colombia Aprende.

Es de destacar que el hecho de que sean las editoriales más vendidas no significa que los libros se puedan calificar de calidad, pero sí es un buen referente para poder ejecutar el análisis respectivo a los textos escolares. Otro criterio de selección que llevó a escoger los dos libros es que ambos presentan estándares y competencias que responden a las exigencias de los estándares curriculares.

Los libros fueron seleccionados para el grado séptimo de la educación básica secundaria de diferentes editoriales y diferentes años de publicación, uno del año 2006 y otro del año 2010, para poder establecer si se presentan o no variaciones, o si por el contrario existen semejanzas al presentar el concepto de número entero negativo y los diferentes obstáculos epistemológicos que se puedan encontrar.

3.3.1 Libro de texto: Conexiones Matemáticas 7 (2006)

Este libro corresponde al Grupo Editorial Norma, y es una adaptación del libro Alfa 7 con estándares de la misma editorial. A continuación se presenta la portada del libro, el fragmento de la tabla de contenido que será analizada y algunos aspectos descriptivos propios del libro de texto[16]:

Nombre del libro: Conexiones Matemáticas 7

Autora: Leonor Camargo Uribe

Editorial: Norma S.A

Edición: Primera

Año de publicación: 2006

País: Bogotá – Colombia.

Tabla 5. Información del libro: Conexiones Matemáticas 7

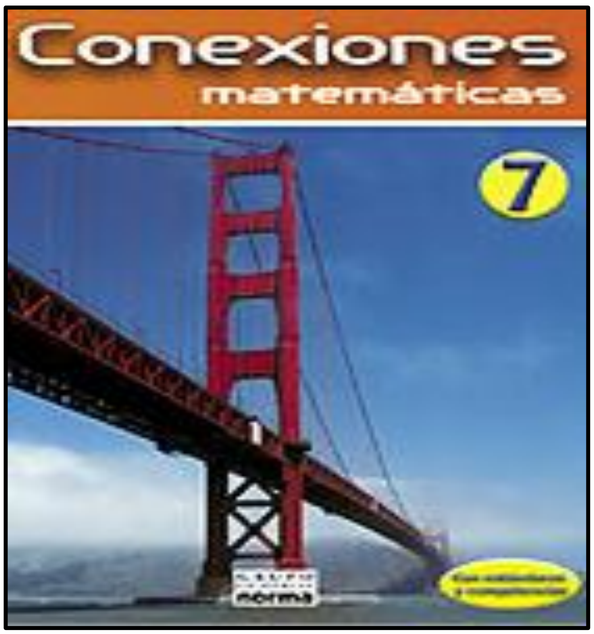
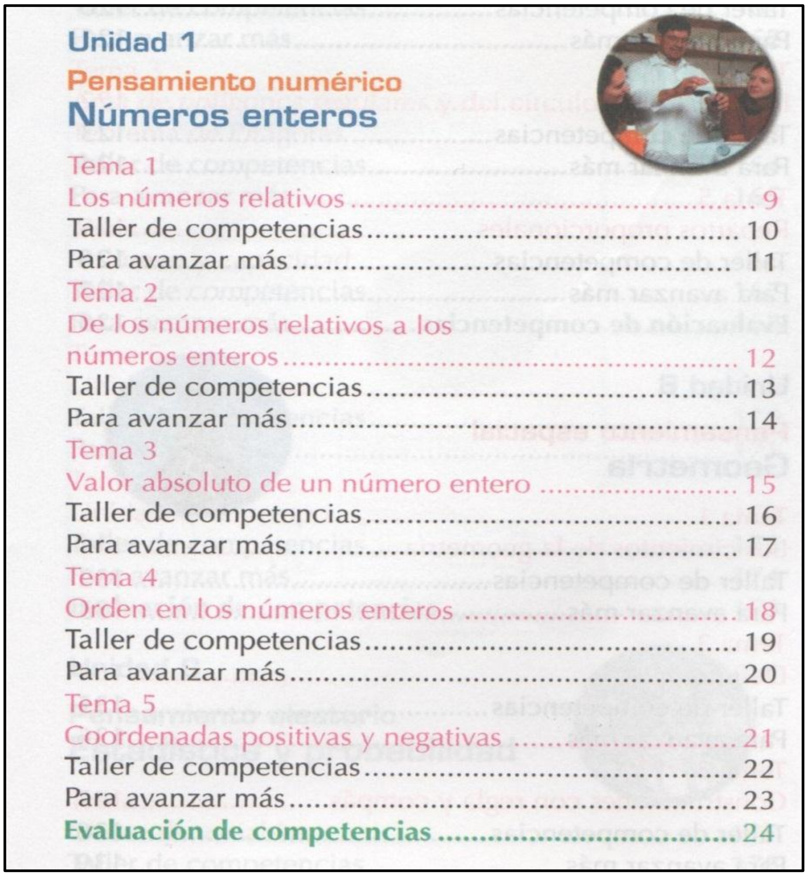


Figura 26. Portada del libro: Conexiones matemáticas 7

[16] La autora Leonor Camargo Uribe es Licenciada en Matemáticas, especialista en Educación Matemáticas e investigadora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.



Unidad 1

Pensamiento numérico

Números enteros

Figura 27. Fragmento de la tabla de contenido del libro: Conexiones Matemáticas 7

A modo general, el libro presenta diez unidades temáticas, cada una de ellas hace alusión a uno de los cinco tipos de pensamiento que será trabajado y los temas desarrollados en la unidad. Además se presentan los estándares y los procesos asociados, muy de la mano a lo establecido por el MEN.

Al inicio de cada unidad se presenta una sección denominada *prepárate,* que consta de una serie de ejercicios introductorios al tema y ayudan a conocer el nivel de competencia necesario para ampliar los temas de la unidad. Por cada tema visto, se presenta un *taller de competencias*, el cual permite aplicar los contenidos estudiados, son clasificados de acuerdo con el proceso que corresponden: comunicación, resolución de problemas, razonamiento lógico y conexiones, además los ejercicios y problemas indican la competencia trabajada: argumentativa, interpretativa y propositiva.

Al finalizar cada unidad aparece la *evaluación de competencias*, con actividades para afianzar los logros propuestos en el desarrollo de los temas. La *prueba saber* es una sección que se encuentra cada dos unidades; en ella se plantea una situación problema y a partir de ella se presentan una serie de preguntas de comprensión y análisis.

Es de resaltar que la unidad que será estudiada es la unidad 1 la cual se denomina *números enteros* relacionada con el pensamiento numérico, para analizar la presentación del concepto de número negativo y poder establecer los diferentes obstáculos epistemológicos presentes en el concepto. Dicha unidad contiene cinco temas, los cuales son:

- Tema 1: Números relativos
- Tema 2: De los números relativos a los números enteros
- Tema 3: Valor absoluto de un número entero
- Tema 4: Orden en los números enteros
- Tema 5: Coordenadas positivas y negativas

3.3.2 Libro de texto: Hipertexto Matemáticas 7 (2010)

El libro Hipertexto, pertenece a la serie de Hipertextos de la editorial Santillana, como una propuesta pedagógica que responde a los Lineamientos Curriculares y a los Estándares Básicos en Competencias exigidos por el MEN. A continuación se presentan algunas descripciones breves de los autores y las características generales del libro de texto:

- **Johann Alexander Chizner**: Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad Antonio Nariño.
- **Juan de Jesús Romero**: Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en Estadística.
- **Francia Leonora Salazar** : Licenciada en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- **Anneris del Rocío Joya** : Licenciada en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.Especialista en Matemática aplicada.
- **Valeria Cely Rojas**: Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Nombre del libro: Hipertexto Matemáticas 7
Autores: Johann Alexander Chizner
Juan de Jesús Romero
Francia Leonora Salazar
Anneris del Rocío Joya
Valeria Cely Rojas
Editorial: Santillana S.A.
Edición: Primera
Año de publicación: 2010
País: Bogotá-Colombia

Tabla 6. Información del libro: Hipertexto Matemáticas 7

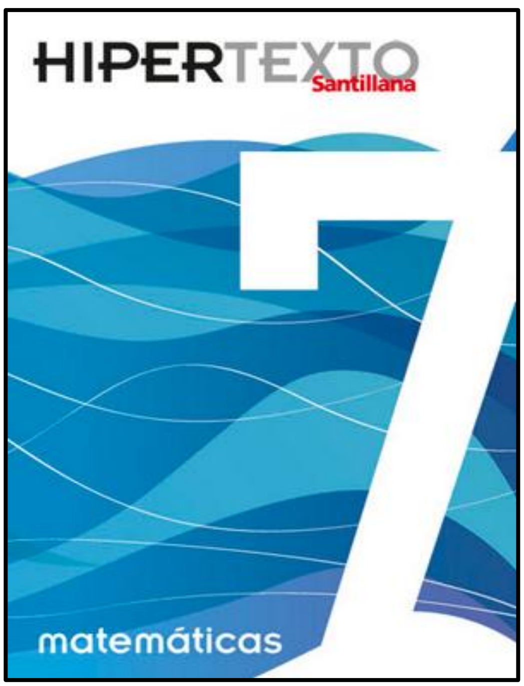


Figura 28. Portada del libro: Hipertexto Matemáticas 7

UNIDAD 1. Números enteros

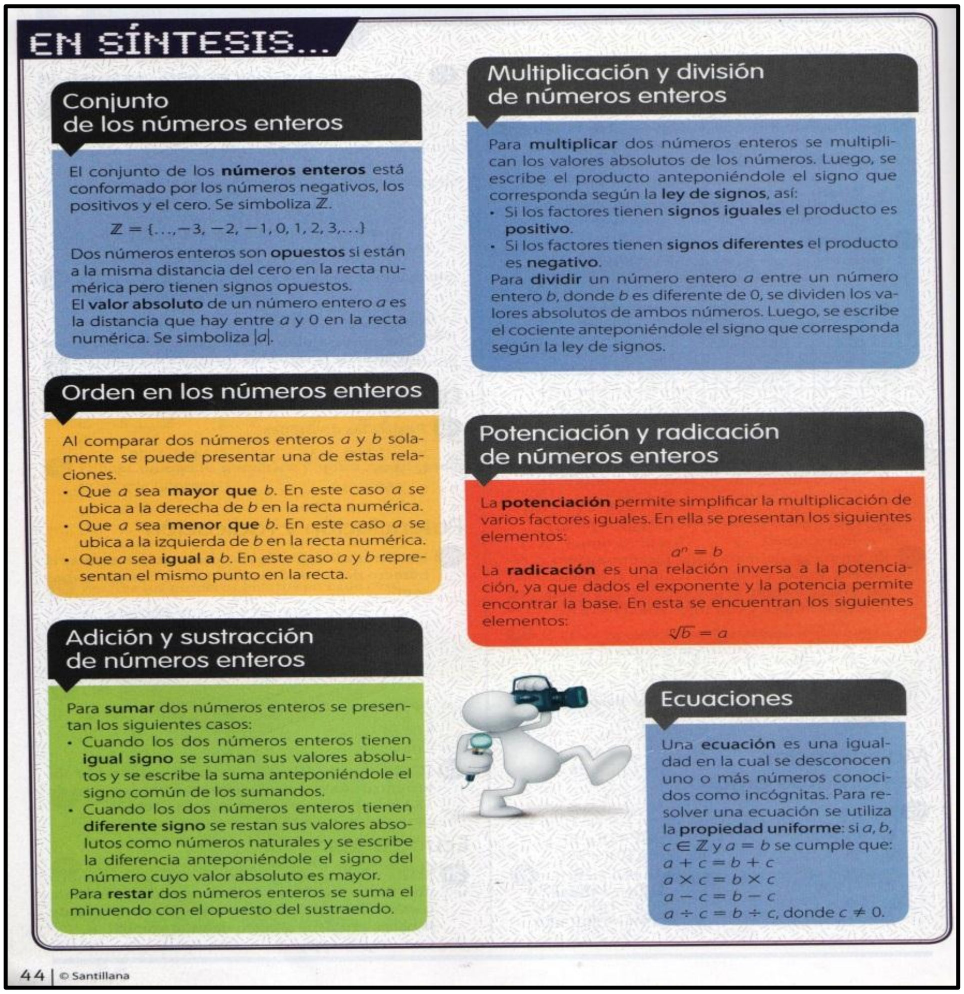
Figura 29. Fragmento de la tabla de contenido del libro: Hipertexto Matemáticas 7

A partir de la anterior figura, se puede ver que es en la unidad I, en la página 10 del libro de texto que se presenta el concepto de número entero. En la página 20 del libro se introducen las operaciones del conjunto numérico, ítem que no será analizado en el trabajo.

El libro se divide en siete unidades temáticas iniciando con los números enteros y culminando en la unidad 7 con estadística y probabilidad. Los contenidos están organizados de acuerdo con los cinco pensamientos matemáticos: numérico, variacional, espacial, métrico y aleatorio.

Al inicio de cada unidad se encuentra el título y los temas correspondientes que serán trabajados, además de una sección denominada *prepárate para,* la cual propone actividades de motivación que inducen a la temática. Es curioso ver la relación de la Historia de las Matemáticas en este libro, pues presenta una breve narración que relaciona la historia con los temas de la unidad. Adicionalmente, se observa una sección que se denomina *para responder;* que son preguntas que surgen a partir de la lectura histórica, con el fin de facilitar la interpretación de textos relacionados con las matemáticas.

Al finalizar cada unidad se presenta una sección llamada *en síntesis*, la cual contiene los aspectos más relevantes a manera de resumen de cada uno de los temas vistos, como se puede apreciar en la siguiente figura:



EN SÍNTESIS...

Conjunto de los números enteros

El conjunto de los **números enteros** está conformado por los números negativos, los positivos y el cero. Se simboliza $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Dos números enteros son **opuestos** si están a la misma distancia del cero en la recta numérica pero tienen signos opuestos.
El **valor absoluto** de un número entero a es la distancia que hay entre a y 0 en la recta numérica. Se simboliza $|a|$.

Orden en los números enteros

Al comparar dos números enteros a y b solamente se puede presentar una de estas relaciones.

- Que a sea **mayor que** b. En este caso a se ubica a la derecha de b en la recta numérica.
- Que a sea **menor que** b. En este caso a se ubica a la izquierda de b en la recta numérica.
- Que a sea **igual a** b. En este caso a y b representan el mismo punto en la recta.

Adición y sustracción de números enteros

Para **sumar** dos números enteros se presentan los siguientes casos:

- Cuando los dos números enteros tienen **igual signo** se suman sus valores absolutos y se escribe la suma anteponiéndole el signo común de los sumandos.
- Cuando los dos números enteros tienen **diferente signo** se restan sus valores absolutos como números naturales y se escribe la diferencia anteponiéndole el signo del número cuyo valor absoluto es mayor.

Para **restar** dos números enteros se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

Multiplicación y división de números enteros

Para **multiplicar** dos números enteros se multiplican los valores absolutos de los números. Luego, se escribe el producto anteponiéndole el signo que corresponda según la **ley de signos**, así:

- Si los factores tienen **signos iguales** el producto es **positivo**.
- Si los factores tienen **signos diferentes** el producto es **negativo**.

Para **dividir** un número entero a entre un número entero b, donde b es diferente de 0, se dividen los valores absolutos de ambos números. Luego, se escribe el cociente anteponiéndole el signo que corresponda según la ley de signos.

Potenciación y radicación de números enteros

La **potenciación** permite simplificar la multiplicación de varios factores iguales. En ella se presentan los siguientes elementos:

$a^n = b$

La **radicación** es una relación inversa a la potenciación, ya que dados el exponente y la potencia permite encontrar la base. En esta se encuentran los siguientes elementos:

$\sqrt[n]{b} = a$

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad en la cual se desconocen uno o más números conocidos como incógnitas. Para resolver una ecuación se utiliza la **propiedad uniforme**: si a, b, $c \in \mathbb{Z}$ y $a = b$ se cumple que:

$a + c = b + c$
$a \times c = b \times c$
$a - c = b - c$
$a \div c = b \div c$, donde $c \neq 0$.

44 | © Santillana

Figura 30. Resumen de la unidad

En el siguiente capítulo, se presentarán los respectivos análisis de los cuatro libros expuestos, contando como referencia con la rejilla de análisis y a partir de ello poder establecer la presentación del concepto de número entero negativo y los diferentes obstáculos que se puedan visualizar, contando con las dimensiones histórica, epistemológica y matemática del concepto de número entero negativo.

CAPITULO 4.

4. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS

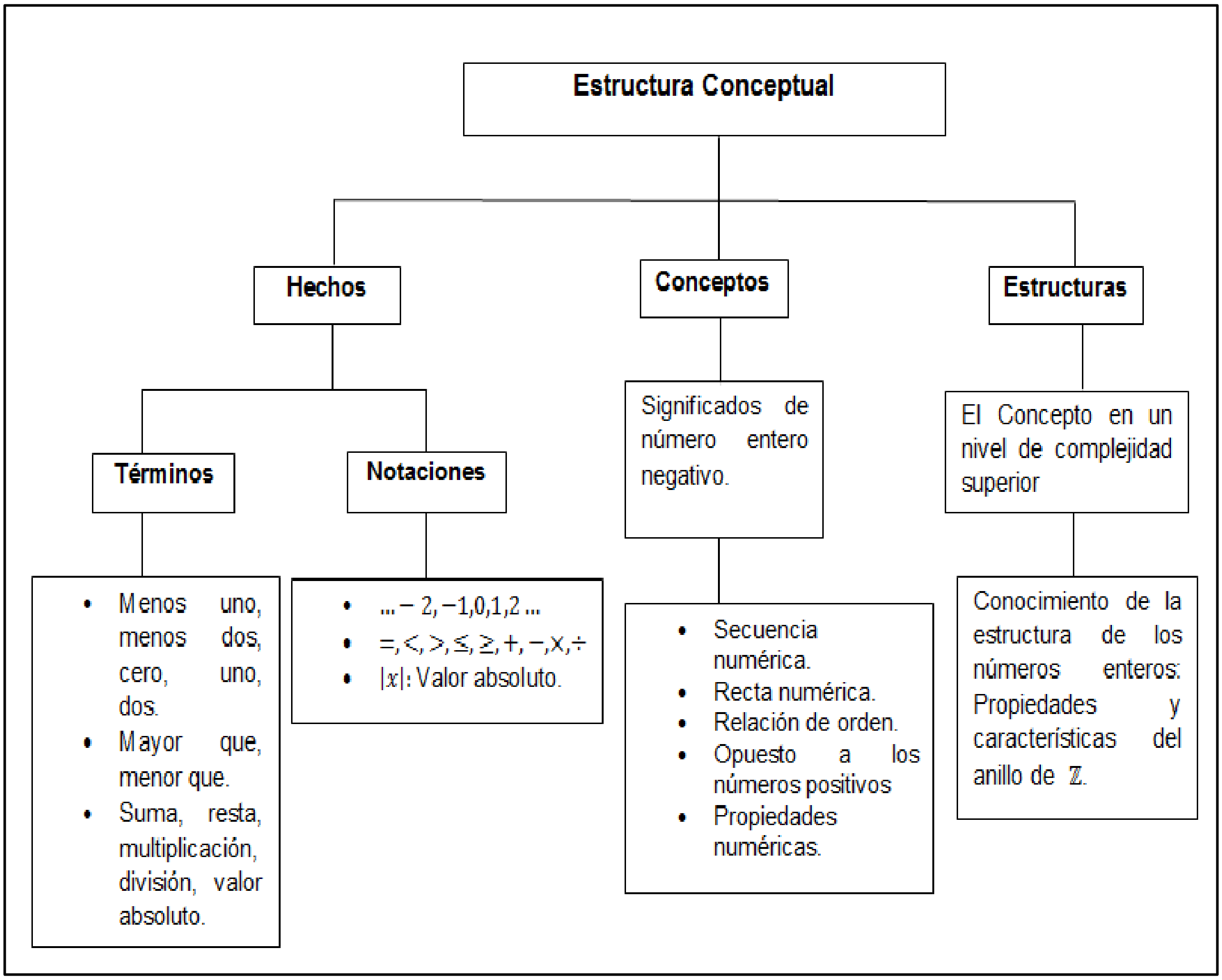
En este capítulo se presenta el análisis de los libros de texto de las reformas educativas presentadas, para ello se tiene como referencia el modelo de análisis de contenido realizando los ajustes pertinentes y las adecuaciones para el objetivo del trabajo, considerando los resultados históricos, epistemológicos y matemáticos que el capítulo nos arrojó.

Es importante mencionar que el análisis de contenido se basa en analizar la diversidad de significados de los conceptos matemáticos, y así mismo poder realizar el contraste de las variaciones o cambios que el concepto ha tenido con el pasar de los años, considerando las reformas y los obstáculos presentes para el concepto de número entero negativo.

4.1 Presentación del Modelo o Rejilla de Análisis

En este ítem se desea ilustrar los principales aspectos que componen la rejilla de análisis, para lo cual se consideran tres de los aspectos de la propuesta de Rico, L., et al (2008), como lo son la estructura conceptual-Procedimental, los sistemas de representación y los contextos numéricos para poder indagar de la presentación del concepto de número entero negativo en los libros de texto en los periodos establecidos. El cruce entre cada uno de los aspectos que se analizaran están determinados de acuerdo a la relación entre cada uno de ellos.

Por tanto, se tendrá en cuenta la estructura conceptual-procedimental para mirar la relación entre el sistema de representación y el contexto numérico,es decir, si el concepto es presentado de manera verbal, gráfica o simbólica contemplando los contextos numéricos de cada sistema, verificando si el número es presentado como: cardinal, medida, ordinal u operacional. A continuación se describen cada uno de los aspectos que serán objeto de análisis por medio de esquemas que sintetizan las unidades de estudio:



Esquema 1. Estructura Conceptual

Como se puede observar en el anterior esquema se especifican las unidades de análisis de la estructura conceptual, indicando lo que de cada campo se espera encontrar, de la misma manera se presenta el siguiente esquema para la estructura procedimental, considerando las destrezas y los razonamientos:

Estructura Procedimental

- **Destrezas**
  - Escritura y lectura de números.
  - Algoritmos de las operaciones.
  - Uso de paréntesis y jerarquía de operaciones.
  - Orden de magnitud de un número o cantidad.
- **Razonamientos**
  - Deductivo: Propiedades numéricas y de operaciones.
  - Inductivo: Regularidades numéricas.
  - Recta numérica: Propiedades y operaciones en la recta.
  - Figurativo: Estructuras que se expresan gráficamente.
  - Argumentos para justificar propiedades numéricas.

Esquema 2. Estructura Procedimental

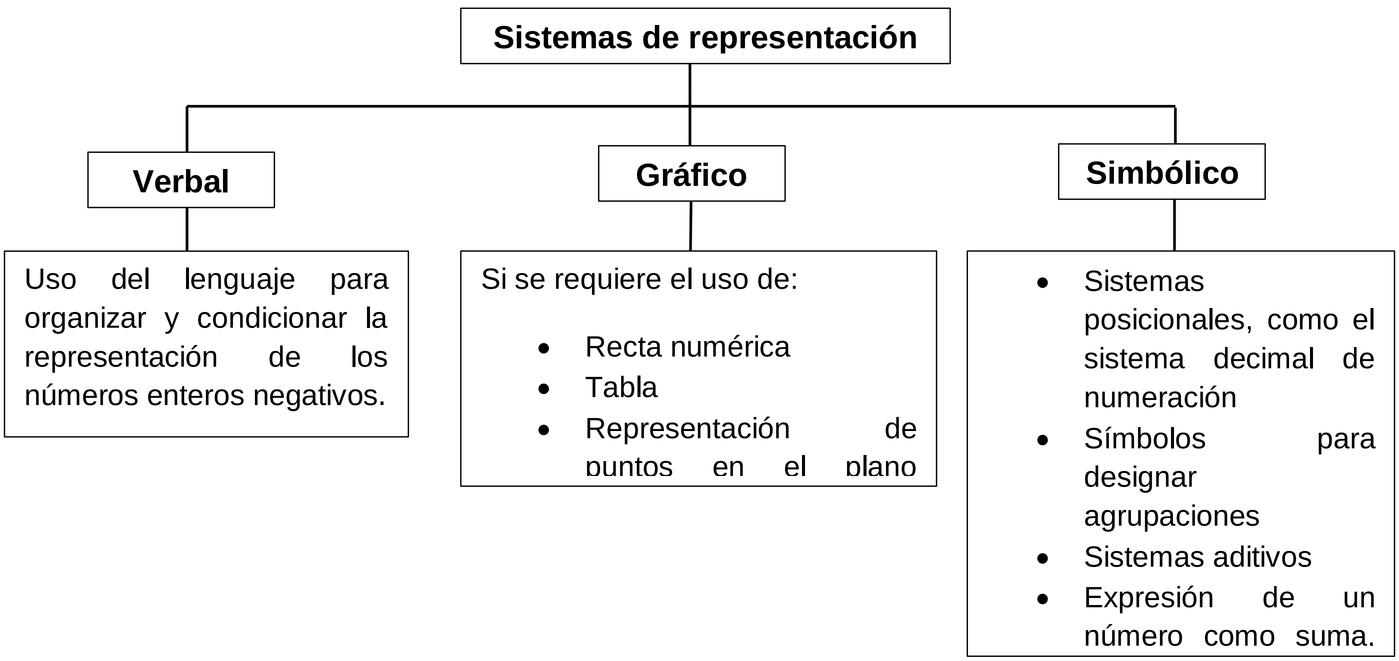
Antes de presentar los sistemas de representación, se tendrá en cuenta a los contextos numéricos, pues éstos se han designado en los tres sistemas de representación para ver sí por ejemplo, el concepto es presentado de manera gráfica y el contexto numérico es cardinal (**Ca**), de medida (**Me**), ordinal (**Or**) u operacional (**Op**).

Dichos contextos numéricos se describen a continuación:

- Cardinal (**Ca**): Un cardinal se puede determinar mediante la aplicación de operaciones suma o multiplicación, o cuando se requiere un algoritmo o procedimiento combinatorio. Responde a preguntas ¿cuántos hay? Ante una colección discreta de objetos distintos.
- Medida (**Me**): Permite conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua, proporciona respuesta a la pregunta ¿cuánto mide? Hace referencia a las longitudes, superficies u otras magnitudes.
- Ordinal (**Or**): Hace referencia a la posición relativa de un elemento dentro de un conjunto discreto y ordenado; proporciona respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?

- Operacional (**Op**): Este contexto se hace referencia a las operaciones matemáticas básicas, las cuales modelizan y proporcionan respuesta a cuestiones de tipo cuantitativo.

Para los sistemas de representación, entendidos como los modos de hacer presente un concepto, se ha considerado el sistema verbal, el gráfico y el simbólico, además de la conexión entre el sistema y los contextos numéricos, es decir, del uso y del significado del número en cada sistema. En el siguiente esquema se puede observar los sistemas de representación con las unidades de análisis:



Esquema 3. Sistemas de representación

De acuerdo a las descripciones presentadas anteriormente y considerando las necesidades del trabajo, se ha construido la siguiente rejilla de análisis de contenido para el concepto de número entero negativo, presentada en la siguiente tabla:

Estructura conceptual-Procedimental	Sistemas de representación / Contextos numéricos	Verbal				Gráfico				Simbólico			
		Ca	**Me**	**Or**	**Op**	**Ca**	**Me**	**Or**	**Op**	**Ca**	**Me**	**Or**	**Op**
Hechos													
Conceptos													
Estructuras													
Destrezas													
Razonamientos													

Tabla 7. Propuesta rejilla para modelo de análisis

4.2 Aplicación de la rejilla para los textos de la matemática moderna

En esta parte del trabajo se llevará a cabo los análisis correspondientes a los libros expuestos en el capítulo anterior que se usaron durante la época de la Reforma de la Matemática Moderna.

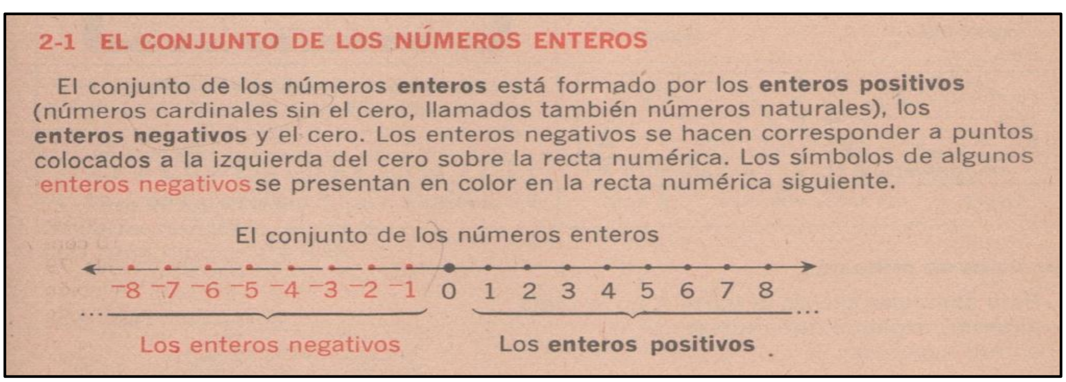
4.2.1 Aplicación de la rejilla para el texto: Serie Matemática Moderna II (1972)

Para llevar a cabo el análisis se aplicó la rejilla al libro de texto en el capítulo, posteriormente se presenta en detalle la descripción de lo encontrado y más adelante los obstáculos epistemológicos que se logran visualizar. En la siguiente tabla se encuentra demarcada la casilla de acuerdo al análisis.

Estructura conceptual-Procedimental	Sistemas de representación / Contextos numéricos	Verbal				Gráfico				Simbólico			
		Ca	Me	Or	Op	Ca	Me	Or	Op	Ca	Me	Or	Op
Hechos		x		x		x		x				X	
Conceptos				x				x					
Estructuras													
Destrezas													
Razonamientos								x					

Tabla 8. Aplicación rejilla de análisis del libro: Serie Matemática Moderna II

De acuerdo a los resultados de la tabla anterior se puede observar que el concepto de número entero negativo se presenta de manera verbal, gráfica y simbólica, donde el contexto numérico juega el mismo papel, es decir, el número como ordinal. El concepto es presentado (ver figura30); primero de manera verbal haciendo alusión al conjunto de los números enteros como el formado por los enteros positivos, los enteros negativos y el cero. Luego se induce la recta numérica para la ubicación y distinción de los positivos y negativos, y por último se presenta una tabla que enuncia a los enteros negativos como los opuestos a los positivos. En la siguiente figura se muestra la definición del concepto que establece el libro de texto:



2-1 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números **enteros** está formado por los **enteros positivos** (números cardinales sin el cero, llamados también números naturales), los **enteros negativos** y el cero. Los enteros negativos se hacen corresponder a puntos colocados a la izquierda del cero sobre la recta numérica. Los símbolos de algunos enteros negativos se presentan en color en la recta numérica siguiente.

Figura 31. Presentación del concepto de manera verbal y gráfica

Se puede observar que en la definición del concepto, el sistema de representación verbal y el gráfico en la recta numérica se relacionan de manera secuencial, además el concepto de número que se evidencia es ordinal en ambos sistemas, puesto que se hace referencia a la posición del número entero negativo como los correspondientes a la izquierda del cero en la recta numérica.

Los hechos corresponden a los términos y las notaciones que el libro usa, la recta numérica es un claro ejemplo de las notaciones del conjunto numérico. No se encuentran símbolos de $<, >, \leq, \geq, =$, que referencien a relaciones de orden en los números enteros, ni se considera el símbolo $\mathbb{Z}$ como representación del conjunto.

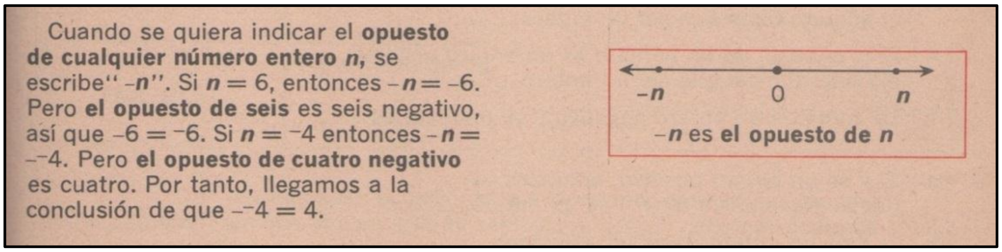
En la misma página del texto el concepto es presentado por medio de una tabla que alude al número entero negativo como el opuesto a los positivos, indicando al símbolo -1 como 1 negativo, y así para los demás enteros como se puede ver en la siguiente figura:

Empleamos la palabra **opuesto** para describir la relación entre un par de enteros como 1 y $^{-}1$.

Símbolo	Nombre	Se dice
$^{-}1$	1 negativo	1 y $^{-}1$ son opuestos
$^{-}2$	2 negativo	2 y $^{-}2$ son opuestos
$^{-}3$	3 negativo	3 y $^{-}3$ son opuestos
⋮	⋮	⋮

Figura 32. Número negativo como opuesto

Del mismo modo, en la figura 32, se indica el opuesto de cualquier número entero n escribiendo $-n$, sin embargo el uso del paréntesis se hace innecesario para expresar el opuesto de un número negativo, en este caso la destreza no se manifiesta como se puede evidenciar en la siguiente figura, ya que no se utiliza un paréntesis para hacer la distinción, aludiendo nuevamente a la recta numérica para representar a $-n$ como el opuesto de n :



Cuando se quiera indicar el **opuesto de cualquier número entero** n, se escribe" $-n$". Si $n = 6$, entonces $-n = -6$. Pero **el opuesto de seis** es seis negativo, así que $-6 = {}^{-}6$. Si $n = {}^{-}4$ entonces $-n = -{}^{-}4$. Pero **el opuesto de cuatro negativo** es cuatro. Por tanto, llegamos a la conclusión de que $-{}^{-}4 = 4$.

Figura 33. Expresión general de un número opuesto

Es evidente el uso de la recta numérica como sistema de representación gráfico para los números enteros negativos, la explicación o el razonamiento de un número opuesto se apoya en la recta numérica. Sin embargo, en el texto el concepto también se contextualiza como una necesidad de utilizarlos en el mundo real, se presentan solo dos casos ilustrativos del uso y luego se propone una serie preguntas que ayudan a contextualizar el concepto de número negativo tomando como referente el termómetro:

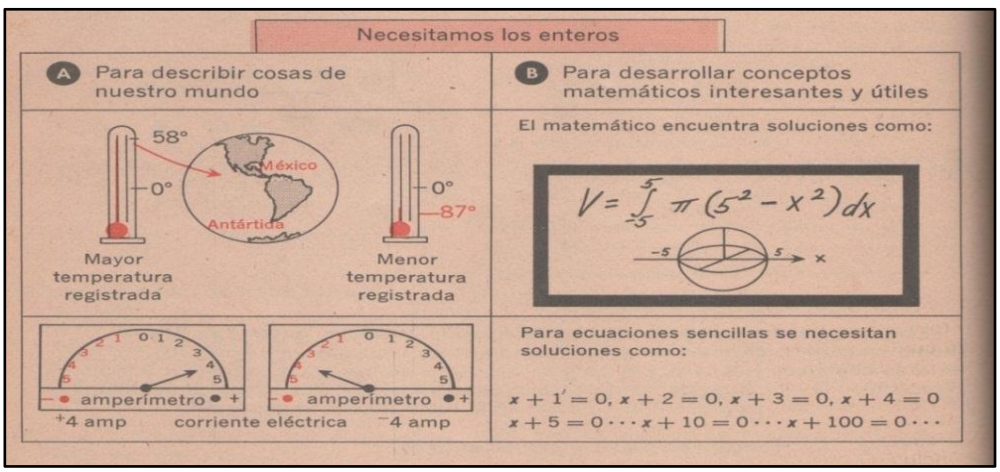
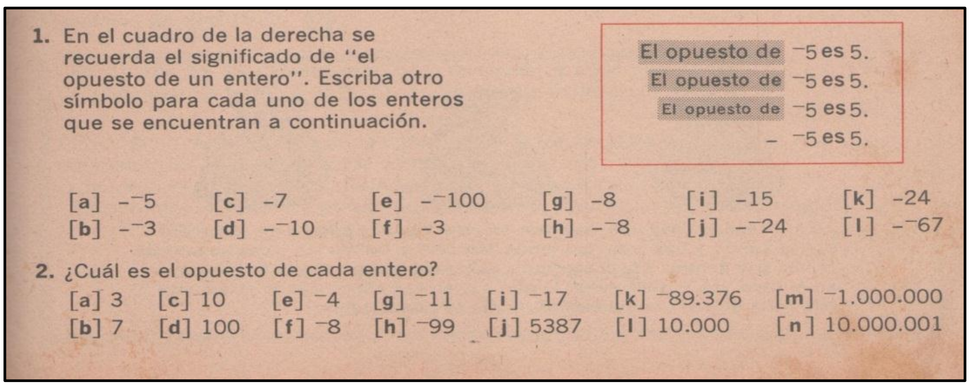


Figura 34. Contextualización del uso de los números enteros

La figura anterior presenta dos casos en los que se usan los números enteros, el primero de ellos hace referencia al uso del termómetro para indicar temperaturas sobre y bajo cero, el segundo enfatiza en aspectos propios de las matemáticas como el caso de la necesidad de los enteros negativos para solucionar ecuaciones lineales.

Es de destacar que el concepto no se presenta a modo de estructura, es decir, no se presenta un nivel de complejidad superior, no se menciona a los números enteros como clases de equivalencia, ni se establece grado de abstracción y mayor rigor lógico como lo establecía la reforma de la Matemática Moderna. El proceso de contextualización es poco, y hace más hincapié al uso del termómetro como recurso para la comprensión de los enteros negativos.

A modo general se puede establecer que el concepto de número entero negativo se presenta como los números que se encuentran a la izquierda del cero, luego se presentan como los opuestos a los números positivos, el contexto numérico es de tipo ordinal, pues son expresados para marcar una posición. Sin embargo, las actividades que se proponen van dirigidas a enfatizar en el número entero negativo, como un número opuesto, tal y como se presenta en la siguiente figura:


1. En el cuadro de la derecha se recuerda el significado de "el opuesto de un entero". Escriba otro símbolo para cada uno de los enteros que se encuentran a continuación.

El opuesto de $^{-}5$ es 5.
El opuesto de $^{-}5$ es 5.
El opuesto de $^{-}5$ es 5.
$-\,^{-}5$ es 5.

[a] $-^{-}5$ [b] $-^{-}3$ [c] -7 [d] $-^{-}10$ [e] $-^{-}100$ [f] -3 [g] -8 [h] $-^{-}8$ [i] -15 [j] $-^{-}24$ [k] -24 [l] $-^{-}67$

2. ¿Cuál es el opuesto de cada entero?

[a] 3 [b] 7 [c] 10 [d] 100 [e] $^{-}4$ [f] $^{-}8$ [g] $^{-}11$ [h] $^{-}99$ [i] $^{-}17$ [j] 5387 [k] $^{-}89.376$ [l] 10.000 [m] $^{-}1.000.000$ [n] 10.000.001

Figura 35. Ejercicios propuestos

Las propiedades de los números se enuncian en la siguiente sección denominada adición de enteros.

4.2.1.1 *Obstáculos a partir del análisis*

En el análisis realizado se logran visualizar algunos de los siguientes obstáculos que se enunciaron en el capítulo 2.

- Uso de modelos concretos: Este obstáculo hace referencia a que algunos modelos permiten contextualizar el uso de los números enteros negativos, justifican la estructura aditiva, pero no la multiplicativa, convirtiéndose en un obstáculo para el aprendizaje. Este caso se presenta en el libro de texto cuando hace énfasis en el uso del termómetro como si al parecer fuera el único modelo en el que se utilizan dichos números, que no solo se presenta como ejemplo sino en las actividades, como se puede evidenciar en la siguiente figura:

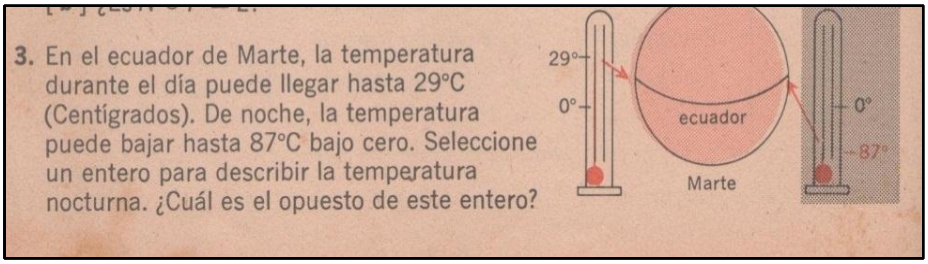


Figura 36. Obstáculo: Uso de modelos concretos

- Identificación de los símbolos literales con números positivos: Este obstáculo corresponde a la idea de que los estudiantes no admiten que $\ll a \gg$ puede representar un número negativo y $\ll -a \gg$ un número positivo. El libro presenta que para indicar el opuesto de cualquier número entero, se escribe $-n$ y el opuesto de un número negativo se representa como _ $-n$, haciendo alusión a un número entero positivo. No se hace explícito el uso del paréntesis y el tratamiento de considerar un número $\ll a \gg$ como un número positivo es un generador del obstáculo como se presenta en la siguiente figura, en uno de los ejercicios propuestos:

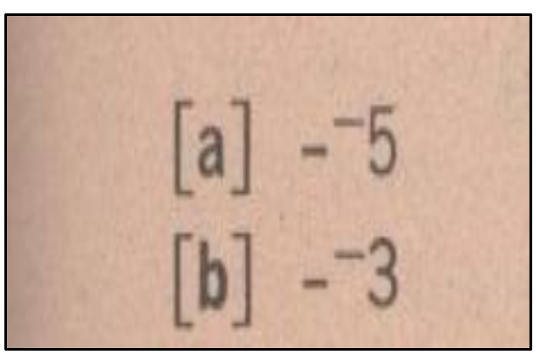


Figura 37. Obstáculo: Identificación de los símbolos literales con números positivos

En ambos casos se presenta la exclusión del uso del paréntesis para indicar el opuesto de un número entero negativo, lo ideal y para evitar el obstáculo sería presentarlo: $-(-5) = 5$

- La aritmética práctica. Lo real como obstáculo: Como ya se mencionó, el libro hace énfasis en que un número entero negativo es el opuesto de un número positivo y la contextualización se basa en el uso del termómetro, aspecto causante del obstáculo, pues se presenta como si fuera el único medio en el que se utilizan los números enteros negativos. No se amplía el contexto y tampoco se presentan otros aspectos de la vida real que den sentido al conjunto numérico.

4.2.2 Aplicación de la rejilla para el texto: Fundamentos de Matemática Superior Moderna (1977)

Estructura conceptual-Procedimental / Sistemas de representación / Contextos numéricos	Verbal				Gráfico				Simbólico			
	Ca	**Me**	**Or**	**Op**	**Ca**	**Me**	**Or**	**Op**	**Ca**	**Me**	**Or**	**Op**
Hechos				**x**							**X**	
Conceptos							**x**					
Estructuras												
Destrezas			**x**	**x**								
Razonamientos			**x**									

Tabla 9. Aplicación rejilla de análisis del libro: Fundamentos de Matemática Superior Moderna

El concepto de número entero negativo es presentado en la unidad III en la página 62, dicha unidad se denomina conjuntos numéricos. Primero se hace una introducción con respecto a los conjuntos en cuanto a su definición, como una idea abstracta y universal, aludiendo a que en las matemáticas los diferentes problemas siempre responden a un resultado concreto o cantidad mensurable: el número. Admite además que la resolución de cualquier ecuación algebraica es un conjunto numérico.

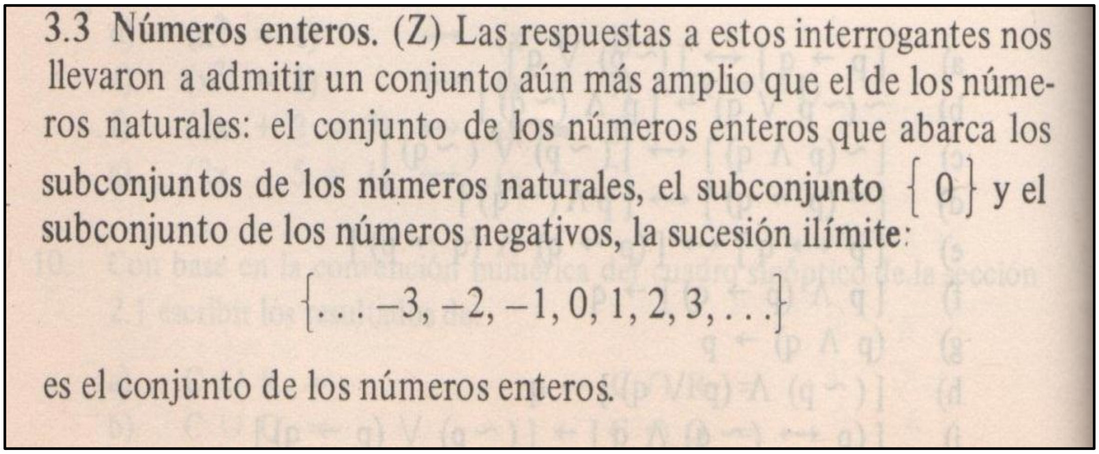
Para introducir los conjuntos numéricos, el libro inicia con el conjunto de los números naturales, definiéndolos como la operación de contar objetos tangibles como $1,2,3,4,5,\ldots$ si tener en cuenta el número cero. Además, se explica también que al niño se le enseña a sumar, restar, multiplicar y dividir pares de estos números, sin embargo para introducir el concepto de número entero lo hace desde un sistema de representación verbal cuyo significado del número es de tipo operacional, como se puede ver en la siguiente figura:

$$3 - 3 = \ ? \ ; \quad 3 - 5 = \ ?$$

Figura 38. Contexto operacional del número entero

De acuerdo a la anterior figura se puede inferir que los números enteros serán presentados como la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales. En la primera operación $3 - 3 = ?$ se obtiene como el resultado el número cero, mientras que en la segunda $3 - 5 = ?$ el resultado adquiere un valor negativo que es -2. Además se establece que estas igualdades hacen alusión a un contexto algebraico, ligado a la resolución de ecuaciones lineales, en donde la variable a despejar es sustituida por el signo de interrogación.

La presentación del concepto de número entero se hace desde la ampliación del conjunto de los números naturales que dan respuesta a las operaciones que se establecieron en el párrafo anterior, se define al conjunto como el conformado por el subconjunto de los números naturales, el subconjunto $\{0\}$ y el subconjunto de los números negativos. Además se presenta como una sucesión ilímite[17] y las notaciones, es decir, los símbolos son presentados en un sistema de representación simbólico, como se muestra en la siguiente figura:



3.3 Números enteros. (Z) Las respuestas a estos interrogantes nos llevaron a admitir un conjunto aún más amplio que el de los números naturales: el conjunto de los números enteros que abarca los subconjuntos de los números naturales, el subconjunto $\{0\}$ y el subconjunto de los números negativos, la sucesión ilímite:

$$\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

es el conjunto de los números enteros.

Figura 39. Definición de número entero

A partir de la figura se puede verificar que se combinan dos sistemas de representación para definir a los números enteros, por un lado se utiliza el verbal y por el otro el gráfico, además se designa a $\mathbb{Z}$ como el símbolo representante del conjunto numérico. No se presenta a los números negativos como los opuestos a los positivos, pero se hace alusión a una relación de orden a partir de la sucesión.

Las destrezas se evidencian en un sistema de representación verbal al presentar al conjunto de modo operacional a través de la sustracción como un algoritmo para dar respuesta a operaciones que en los números naturales no tienen solución. El orden de magnitud de los números es otro de los elementos que hacen dar significado al número entero negativo.

El razonamiento se presenta de manera verbal aludiendo al concepto de número negativo en un contexto de tipo ordinal, expuesto por un lado de manera figurativa, es decir, la estructura se representa en la relación de orden y por el otro de manera inductiva puesto que a partir de la gráfica se pueden determinar las regularidades

[17] Se define una sucesión ilímite como aquella que no presenta un término finito de elementos.

numéricas, en especial las concernientes a la posición de los números y los símbolos que los diferencian positivos de negativos:

$$\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Figura 40. Número negativo de manera figurativa e inductiva

En el libro no se contextualiza el concepto de número negativo, es decir, no se hace una relación de éste con situaciones de la vida real, en el campo en el que es reconocido su uso es de tipo algebraico. No se presentan propiedades numéricas ni un acercamiento a la estructura de los enteros, es decir, como clases de equivalencia o una construcción de tipo formal del conjunto numérico.

El libro no presenta más aspectos de tipo definición o relación con el contexto de los estudiantes, seguido a este conjunto numérico de los enteros, se presenta al conjunto de los racionales, posteriormente los números reales y finalmente los números complejos, para afirmar que todo número es un número complejo.

De acuerdo a lo anterior, el libro presenta las propiedades de los números complejos y de los números reales, pero no de los enteros. Más adelante se presenta una particularidad del conjunto de los números enteros, como la clase de residuos de los enteros módulo m, definido como un conjunto finito formado por los residuos que resultan, al dividir los enteros por el módulo m, ofreciendo diversidad de ejemplos relacionados con clases residuales.

También se presenta la definición de anillo conmutativo, determinado por un conjunto indefinido de por lo menos dos elementos y dos operaciones binarias indefinidas, ligando a los números enteros como un anillo conmutativo con elemento unidad como se puede ver a continuación:

Si, además, existe un elemento de identidad para la multiplicación, hablamos, entonces, de un **anillo conmutativo con elemento unidad.**

Los siguientes son ejemplos de anillos con elemento unidad: el conjunto de números reales, el conjunto de números enteros, la clase de residuo, mod. m, cualquier campo.

El conjunto de números enteros pares es un ejemplo de anillo conmutativo **sin** elemento unidad.

Figura 41. Números enteros como anillo

Con lo anterior culmina la unidad III presentando al final una serie de ejercicios que involucran resolución de ecuaciones y verificación de propiedades y de operaciones tanto de números reales como de números complejos. Es evidente que no se hace explícito las operaciones con números enteros y mucho menos una conceptualización más amplia.

4.2.2.1 Obstáculos en el libro Fundamentos de Matemática Superior Moderna (1977)

Como se pudo observar, el libro de texto no presenta una contextualización del concepto de número entero negativo, se trabaja el concepto de manera en que el significado que se le otorga al número es de tipo ordinal, se pueden encontrar los siguientes obstáculos que dificultan la enseñanza y aprendizaje:

- La sustracción como disminución: Este obstáculo se evidencia cuando el libro presenta la operación $3-5=?$, haciendo alusión a presentar la definición formal $a-b=c \; si \; y \; solo \; si \; a=b+c$, conllevando a confundir el signo $(-)$ de la sustracción con el signo $(-)$ de número entero negativo que luego es presentado de manera ordinal, como una posición que se ubica a la izquierda del cero, tal y como se presenta en la siguiente figura:

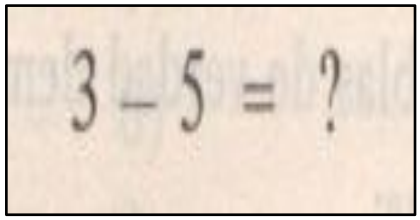


Figura 42. Obstáculo: La sustracción como disminución

- La identificación de los símbolos literales con números positivos: Este obstáculo epistemológico hace referencia a que los números negativos son aquellos que están precedidos del signo $(-)$, es decir, $-x$ es un número entero negativo, mientras que x representa un número positivo. Este hecho genera que los estudiantes no admitan por ejemplo x puede representar un número negativo, caso que no se expone en el libro de texto.

- Lo formal como obstáculo: El concepto de número negativo se presenta en el libro de texto reducido a un formalismo vacío, es decir, se definen como los números que ocupan una posición con el signo $(-)$, no se contextualiza el uso y queda plasmado como si la única razón de emplear los números enteros negativos sea el contexto algebraico, ligado a la resolución de ecuaciones lineales.

- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural: Presentar la secuencia de que los naturales van aumentando a medida que se alejan del cero y trasladar dicha secuencia a los negativos es un generador del obstáculo. El libro enseña sólo el orden posicional de los números enteros, como una sucesión ilímite, permitiendo admitir que, por ejemplo $2 > 1$ y por ende $-2 > -1$. No se hace explícito la relación de orden en el conjunto numérico ni se profundiza en éste.

4.3 Contraste entre los libros analizados de la Matemática Moderna

A partir de los análisis presentados en los dos libros de la Matemática Moderna, se pueden establecer las siguientes comparaciones, no sin antes recordar el nombre y las fechas de los libros y las convenciones que se utilizarán para hacer mención a cada uno de ellos:

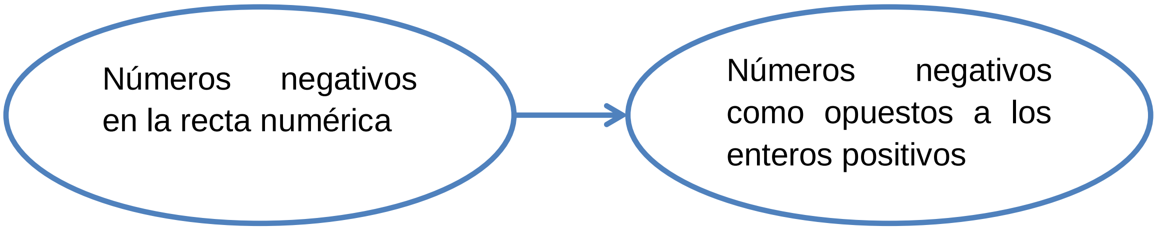
- Libro 1: Serie Matemática Moderna II (1972). Editorial: Norma
- Libro 2: Fundamentos de Matemática Superior Moderna (1977).Editorial : Bedout

El concepto de número entero negativo en los dos libros presenta grandes cambios y variaciones, incluso los libros de la reforma no tienen algún parecido en cuanto al tratamiento de la definición que se le da al concepto de número entero negativo.

En el libro 1, los números enteros negativos son presentados en primera instancia en la recta numérica haciendo la distinción entre los enteros positivos o números cardinales sin el cero y los negativos como la correspondencia de puntos colocados a la izquierda del cero, posteriormente se presenta como los números opuestos a los números enteros positivos, tomando como punto de apoyo la recta numérica como sistema de representación gráfico.

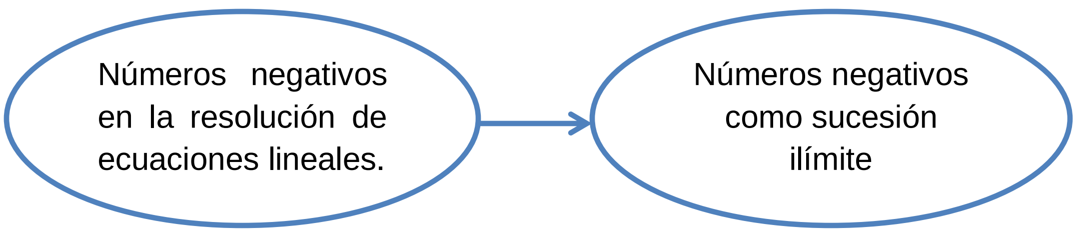
En el libro 2, se definen los números enteros como los conformados por el subconjunto de los números naturales, el subconjunto $\{0\}$ y el subconjunto de los números negativos, presentados como una sucesión ilímite. El contexto en el que surge la necesidad de éstos números es un contexto algebraico en la resolución de ecuaciones lineales. No se presentan como los opuestos a los enteros positivos, ni se expone la recta numérica como sistema de representación.

A continuación se presenta el siguiente esquema que sintetiza las variaciones y la secuencia que se establece en los libros de texto en cuanto a la presentación del concepto de número entero negativo:



Esquema 4. Secuencia del concepto de entero negativo en el libro 1

Como se puede ver en el esquema el concepto de número al que se hace alusión en el libro 1, es de tipo ordinal, pues se establece una relación de correspondencia de puntos colocados a la izquierda del cero identificados como los números negativos en la recta numérica, caso contrario ocurre en el libro 2 que introduce el concepto de número entero negativo desde un contexto numérico de tipo operacional. En el siguiente esquema se presenta la secuencia y el estatus que se le brinda al concepto:



Esquema 5. Secuencia del número entero negativo en el libro 2

Como se puede observar, en el libro 2 se introduce los números negativos de manera algebraica, cuyo concepto de número hace alusión al tipo operacional, para dar soluciones negativas a ecuaciones en el campo de la aritmética que no tienen como conjunto solución a los números naturales.

Es evidente la diferencia que se da a la definición del concepto de número entero negativo en los dos libros, incluso ambos libros a pesar de pertenecer a la Reforma de las Matemáticas Modernas, tienen diferentes enfoques y maneras de introducir los números negativos y el concepto de número es diferente para el estatus en cada uno de los libros de texto.

Un indicador que se puede establecer es que el libro 1 pertenece al año 1972, mientras que el libro 2 es del año 1977 periodo en el cual ya se encuentra vigente el Decreto 080 de 1974, que legaliza la Reforma de la Matemática Moderna, y por ello, el uso del álgebra para introducir los números enteros negativos.

El sistema de representación que utiliza el libro 1 es sin duda alguna el gráfico, pues toma como referencia la recta numérica para hacer la distinción entre los números negativos y los positivos, mientras que en libro 2 se hace uso de la denominada sucesión ilímite.

Por otro lado, la contextualización que se otorga al número negativo es escasa, sin embargo en el libro 1 se hace correspondencia de este concepto en situaciones relacionadas con el uso del termómetro y enunciados que aluden a las ganancias y pérdidas. El libro 2 por su parte no menciona ningún aspecto que contextualice al conjunto numérico de los enteros negativos.

En cuanto a los obstáculos presentes en ambos libros se logra percibir la similitud del obstáculo: *la identificación de símbolos literales con números positivos,* en el libro 1 por ejemplo, este obstáculo se visualiza en considerar un número $\ll a \gg$ como un número positivo, y el opuesto de un número negativo representado como _ $-n$, sin considerar el uso del paréntesis y que cualquier número $\ll a \gg$ puede incluso sin el signo $(-)$ representar un número negativo, mientras que el libro 2, el número negativo se simboliza por el signo $(-)$.

En el siguiente ítem se presenta la aplicación de la rejilla de análisis para los libros de texto del periodo de la matemática actual, considerando la rejilla propuesta y las dimensiones histórica, epistemológica y matemática, que sirven como referente para el respectivo análisis.

Los libros seleccionados son de los años 2006 y 2010, de manera que permitan visualizar posibles cambios bajo la misma reforma educativa , y asi mismo poder encontrar la forma en que es definido el concepto de número entero negativo.

4.4 Aplicación de la rejilla para los textos de la matemática actual

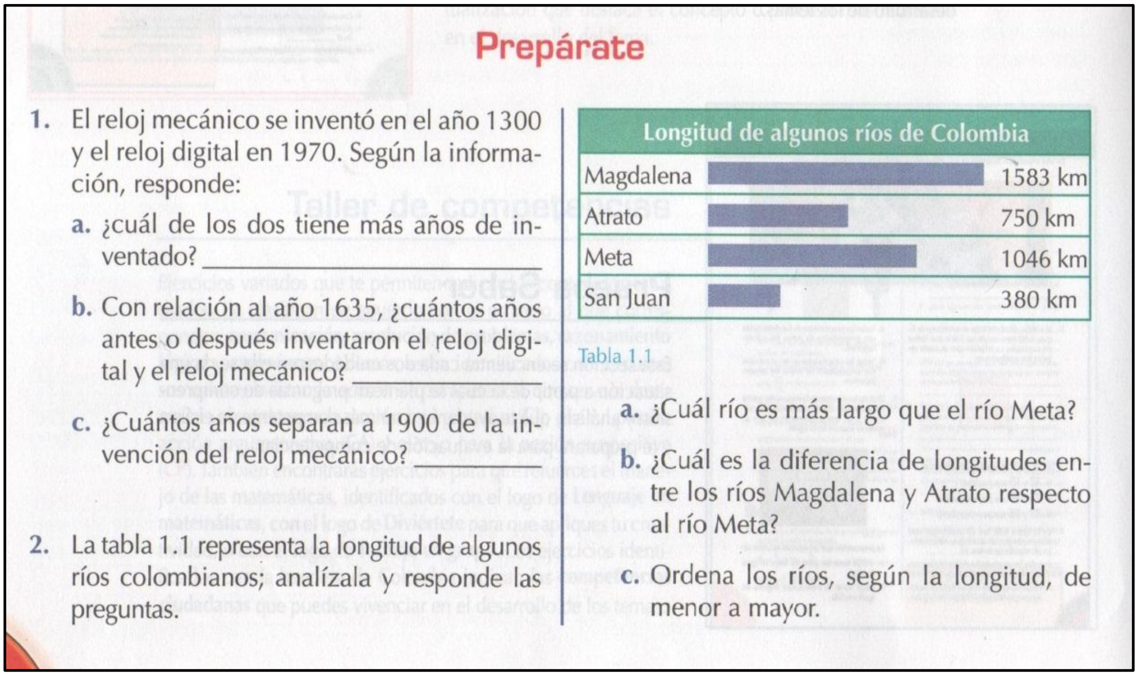
4.4.1 Aplicación rejilla de análisis para el texto: Conexiones Matemáticas 7 (2006)

Estructura conceptual-Procedimental	Sistemas de representación / Contextos numéricos	Verbal				Gráfico				Simbólico			
		Ca	**Me**	**Or**	**Op**	**Ca**	**Me**	**Or**	**Op**	**Ca**	**Me**	**Or**	**Op**
Hechos				x								x	
Conceptos								x	x				x
Estructuras													
Destrezas				x				x				x	
Razonamientos								x					

Tabla 10. Aplicación rejilla de análisis para el texto Conexiones Matemáticas 7 (2006)

Recordemos en primera instancia que el concepto de número entero se presenta en la unidad I del libro de texto, denominada **números enteros**. Iniciando con los números relativos, valor absoluto, orden en los enteros y por último la representación de coordenadas en el plano cartesiano. Cada uno de estos contenidos son presentados en temas. Además el libro hace explícito el tipo de pensamiento que se trabajará en la unidad el cual es el pensamiento numérico.

Inicialmente se hacen explícitos los estándares que serán desarrollados en la unidad y los procesos asociados, los cuales son; conexiones, comunicación, razonamiento lógico y resolución de problemas, luego se hace una introducción en la sección denominada *prepárate,* con dos ejercicios que movilizan intuitivamente el concepto de número entero, presentando relaciones de orden, en cuanto a la longitud de algunos ríos de Colombia, ligando el concepto de número en un contexto de medida, y puntos de referencia en relación con diferentes situaciones como el año de invención del reloj mecánico y el reloj digital, tal y como se presenta en la siguiente figura:



Prepárate

1. El reloj mecánico se inventó en el año 1300 y el reloj digital en 1970. Según la información, responde:
   a. ¿cuál de los dos tiene más años de inventado? ____________
   b. Con relación al año 1635, ¿cuántos años antes o después inventaron el reloj digital y el reloj mecánico? ____________
   c. ¿Cuántos años separan a 1900 de la invención del reloj mecánico? ____________
2. La tabla 1.1 representa la longitud de algunos ríos colombianos; analízala y responde las preguntas.

Longitud de algunos ríos de Colombia	
Magdalena	1583 km
Atrato	750 km
Meta	1046 km
San Juan	380 km

Tabla 1.1

   a. ¿Cuál río es más largo que el río Meta?
   b. ¿Cuál es la diferencia de longitudes entre los ríos Magdalena y Atrato respecto al río Meta?
   c. Ordena los ríos, según la longitud, de menor a mayor.

Figura 43. Actividad introductoria de número entero

A partir de lo anterior, en el *tema 1* que se denomina : *los números relativos,* se hace el primer acercamiento de contextualización al número entero, como la ubicación de un punto de referencia, presentando en un sistema de representación verbal la definición de número relativo, además se evidencia que los hechos (términos y notaciones) son presentados de manera verbal y el concepto de número es de tipo ordinal , al establecer las diferentes expresiones que se usan para hacer referencia al número relativo, como se puede ver en la siguiente figura:

La ubicación de un punto de referencia da lugar a la determinación de los **números relativos**.

Los números relativos sintetizan el uso de expresiones como: antes, después; menos que, más que; por debajo de, por encima de; a la izquierda de, a la derecha de; deudas, ganancias.

Para escribir números relativos, utilizamos notaciones como:

$-2,\ +3,\ -200,\ +200,\ -6,\ -12,\ +13.$

Figura 44. Número negativo como número relativo

En la figura anterior se establece la simbología o las notaciones $-2, +3, -200$, para indicar la posición del número en una situación determinada en relación con un punto de referencia para poder establecer las diferentes expresiones, como más que, menos que, por debajo que, entre otros.

En el *tema 2* denominado: *de los números relativos a los números enteros, se* efectúa una definición formal del concepto, no sin antes presentar un ejemplo que contextualiza el uso de los números negativos relacionándolos con el control del peso, como se presenta en la siguiente figura:

El entrenador del equipo de fútbol realizó el control de peso de 10 de sus jugadores. El peso ideal es 73 kg. Después escribió la información en la tabla 1.5.

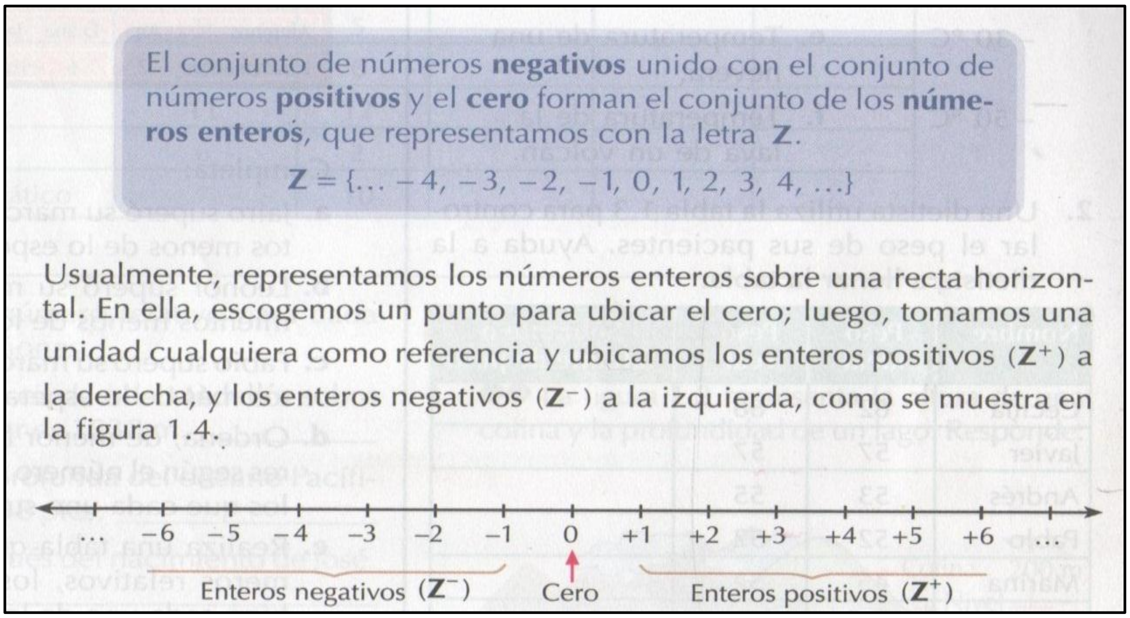
Jugador	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
kg de más o de menos	+ 3	+ 1	0	− 4	+ 6	− 2	+2	− 1	− 5	+ 5

Tabla 1.5

Los números negativos indican un peso menor al ideal; los positivos indican un sobrepeso y el cero corresponde al jugador que tiene el peso ideal.

Figura 45. Contextualización a los números enteros

Se define de manera verbal el conjunto de los números enteros, representado por el símbolo $\mathbb{Z}$ y como el conformado por la unión de los números negativos, los números positivos y el cero. Además de usar el sistema de representación verbal también se hace alusión a la recta numérica, es decir, al sistema de representación gráfico, que involucra el concepto de número en un contexto ordinal, haciendo la distinción de los negativos y los positivos, como se puede ver en la siguiente figura:



El conjunto de números **negativos** unido con el conjunto de números **positivos** y el **cero** forman el conjunto de los **números enteros**, que representamos con la letra **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Usualmente, representamos los números enteros sobre una recta horizontal. En ella, escogemos un punto para ubicar el cero; luego, tomamos una unidad cualquiera como referencia y ubicamos los enteros positivos ($\mathbf{Z}^+$) a la derecha, y los enteros negativos ($\mathbf{Z}^-$) a la izquierda, como se muestra en la figura 1.4.

Figura 46. Definición de número entero

El libro no solo presenta de manera gráfica la ubicación de los números negativos, como los que encuentran a la izquierda del cero, también utiliza la recta numérica para hacer desplazamientos sobre ella y establecer que los números que están a la misma distancia de cero y tienen signos diferentes son opuestos, indicando que el opuesto de un número a es $(-a)$.

El significado de número al que se alude es de tipo operacional, pues al realizar desplazamientos se están haciendo transformaciones del objeto y permite establecer relaciones de comparación, en este caso, los números opuestos, tal y como se aprecia en la siguiente figura:

En la figura 1.5, hemos representado con flechas la distancia de algunos números al cero; pares de números como -2 y $+2$, -4 y $+4$ están a la misma distancia de cero, pero poseen diferente signo.

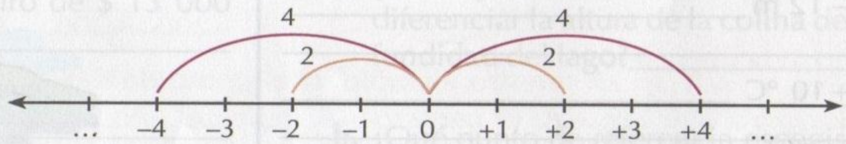


Fig. 1.5

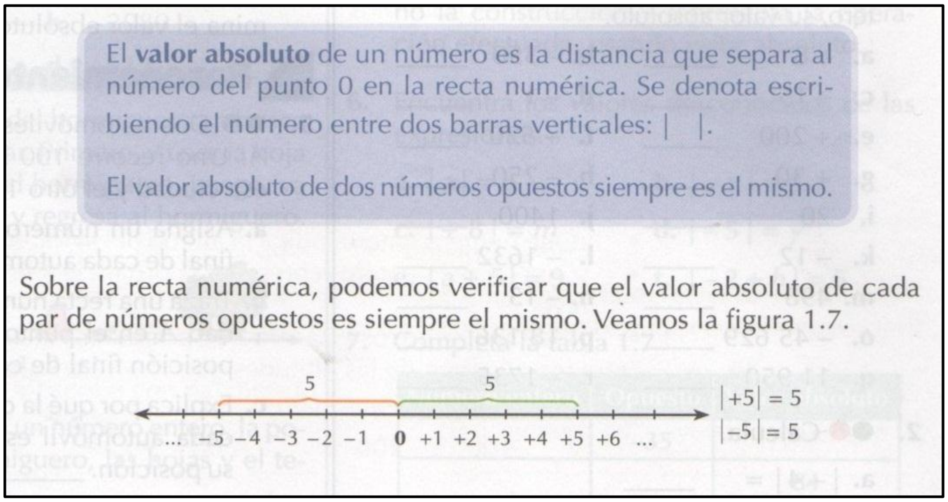
Los números que están a la misma distancia de cero y que tienen signos diferentes se llaman **opuestos**. El opuesto de un número entero ***a*** se representa como (− ***a***).

Figura 47. Números negativos como números opuestos

A partir de la figura se puede establecer el estatus que se le otorga al número negativo, de un significado de opuesto de un número entero cualquiera a. En este sentido las destrezas son presentadas en el orden de magnitud de un número, a los que se le atribuye un sentido opuesto representado con el símbolo $-a$.

Más adelante, el libro presenta en el *tema 3* el valor absoluto de un número entero, expuesto como la distancia que separa al número del cero en la recta numérica. Es evidente el uso que hace el libro de texto de la recta numérica para presentar por un lado el opuesto de un número y por el otro el desplazamiento de cantidades positivas y negativas para determinar que el valor absoluto de dos números enteros opuestos es el mismo.

Es sobre la recta numérica en la que se puede verificar que el valor absoluto de cada par de números opuestos es el mismo, y esto se hace con el objetivo de que en el siguiente tema se pueda establecer la relación de orden de los números enteros. El valor absoluto de un número entero se puede evidenciar en la siguiente figura:



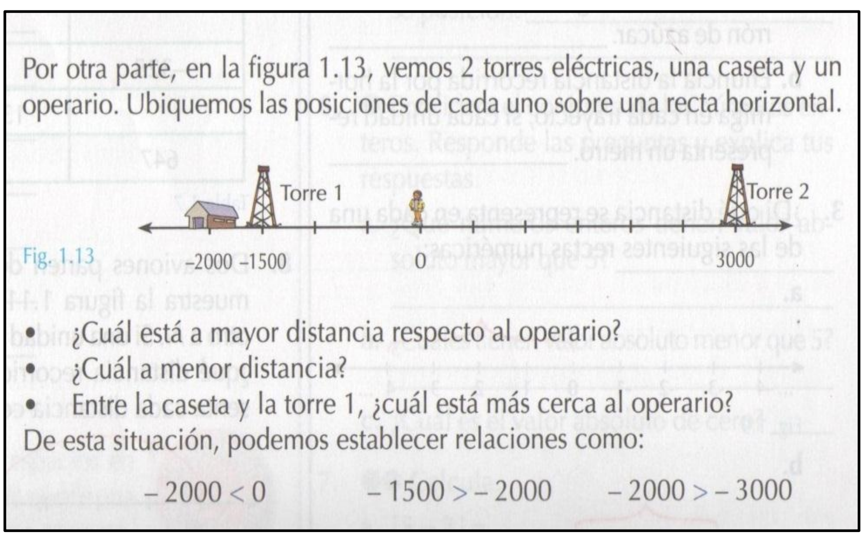
El **valor absoluto** de un número es la distancia que separa al número del punto 0 en la recta numérica. Se denota escribiendo el número entre dos barras verticales: | |.

El valor absoluto de dos números opuestos siempre es el mismo.

Sobre la recta numérica, podemos verificar que el valor absoluto de cada par de números opuestos es siempre el mismo. Veamos la figura 1.7.

Figura 48. Valor absoluto de un número entero

En la página 18 del libro de texto, se presenta el *tema 4*, el cual se denomina *orden de los números enteros,* inicia con dos ejemplos en una representación figural, por un lado relacionando el uso de los números negativos y positivos con altitudes y distancias, y por el otro, como posiciones que se encuentran a mayor y menor distancia de un punto de referencia, así como es presentado en la siguiente figura:



Por otra parte, en la figura 1.13, vemos 2 torres eléctricas, una caseta y un operario. Ubiquemos las posiciones de cada uno sobre una recta horizontal.

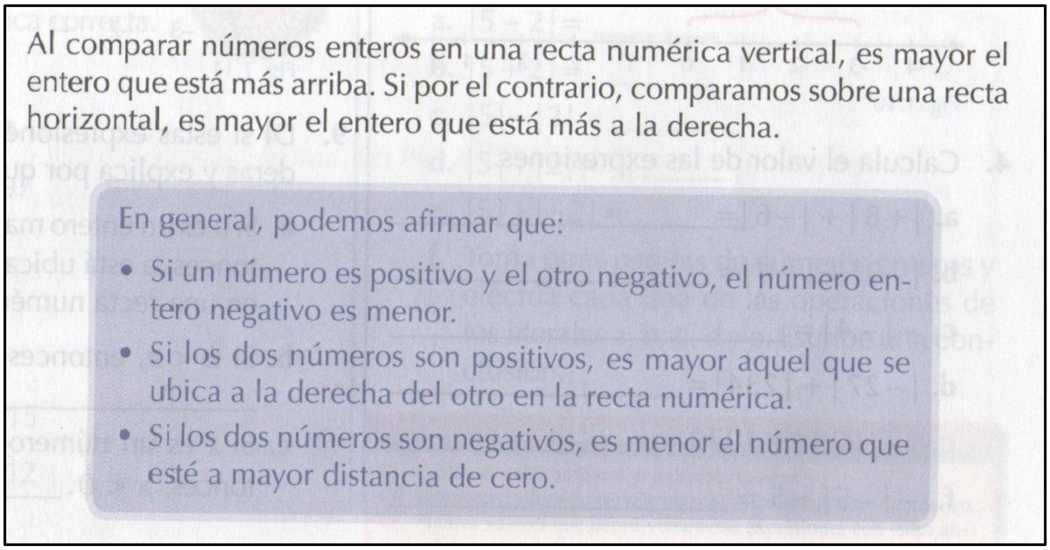
- ¿Cuál está a mayor distancia respecto al operario?
- ¿Cuál a menor distancia?
- Entre la caseta y la torre 1, ¿cuál está más cerca al operario?

De esta situación, podemos establecer relaciones como:

$-2000 < 0$ $\quad -1500 > -2000$ $\quad -2000 > -3000$

Figura 49. Relación de orden en los enteros

A partir de lo anterior, se puede establecer la relación de orden de los números enteros, haciendo comparaciones que la recta numérica permite hacer a través de la ubicación de puntos que distan cierta cantidad de unidades a la derecha y a la izquierda del cero, llegando a la siguiente conclusión:



Al comparar números enteros en una recta numérica vertical, es mayor el entero que está más arriba. Si por el contrario, comparamos sobre una recta horizontal, es mayor el entero que está más a la derecha.

En general, podemos afirmar que:

- Si un número es positivo y el otro negativo, el número entero negativo es menor.
- Si los dos números son positivos, es mayor aquel que se ubica a la derecha del otro en la recta numérica.
- Si los dos números son negativos, es menor el número que esté a mayor distancia de cero.

Figura 50. Orden en los números enteros

Después de presentar esta afirmación de la relación de orden de los números enteros, el número entero negativo es definido como el número menor. Después se presenta una serie de ejercicios enfocados a ordenar y justificar en la recta numérica algunos números y así mismo se presentan pares de números a los que se les debe si es mayor o menor que.

Por último, el libro de texto en el *tema 5* denominado *coordenadas positivas y negativas* presenta el plano cartesiano como un medio que permite la ubicación de puntos cuyas coordenadas son pares de números enteros, y definiendo que en una pareja ordenada, la abscisa y la ordenada constituyen las coordenadas de un punto.

Es importante resaltar que el libro enfatiza al finalizar cada tema en el *taller de competencias* que orientan al estudiante a la exploración y resolución de problemas facilitando claridad cognitiva de cada tema trabajado, contextualizando el uso del conjunto de los números enteros y en especial el de los enteros negativos.

Al finalizar la unidad I el libro presenta la *evaluación de competencias* que tiene como directriz una serie de actividades para afianzar los logros propuestos en cada tema, presentando preguntas tipo ICFES y dar paso a la unidad que corresponde a las operaciones con números enteros.

4.4.1.1 Obstáculos en el libro Conexiones Matemáticas 7 (2006)

De acuerdo al análisis que se realizó al libro de texto se puede establecer que el libro contextualiza el concepto que se trabaja en cada tema a partir de situaciones problema que inducen a que el estudiante tenga una idea previa del concepto o la temática a explorar. A modo de síntesis se presenta la secuencia del concepto de número entero negativo:

I. Los números relativos
II. De los números relativos a los números enteros
III. Valor absoluto de un número entero
IV. Orden en los números enteros
V. Coordenadas positivas y negativas.

Al analizar el estatus que se le otorga al número entero negativo en los temas de la unidad, se pueden establecer los siguientes obstáculos:

- Modelo de ganancias y pérdidas. Según Cid (2000), este obstáculo enfatiza en que el presentar modelos concretos que contextualicen el uso de los números enteros negativos en situaciones de ganancias y pérdidas, explican sin duda alguna problemas de tipo aditivo, pero se convierte en obstáculo para la estructura multiplicativa. En el libro no se presenta de manera explícita un ejemplo de este tipo de situaciones, sin embargo se presenta de manera verbal, es decir, se enuncia que los números relativos se utilizan en situaciones que se relacionan con deudas y ganancias, como se puede observar en la siguiente figura:

> Los números relativos sintetizan el uso de expresiones como: antes, después; menos que, más que; por debajo de, por encima de; a la izquierda de, a la derecha de; deudas, ganancias.

Figura 51. Obstáculo: Modelo de ganancias y pérdidas

Este obstáculo aunque no se hace presente en alguna situación que plantee el libro de texto, es enunciado como una expresión que puede aparecer en algún contexto de algún problema o situaciones de la vida.

- Identificación de los símbolos literales con números positivos: Este obstáculo epistemológico hace referencia a que los números negativos tienen precedido un signo menos $(-)$,es decir, $-x$, representando el opuesto, sin admitir que por ejemplo un número entero x puede representar un número negativo. Este obstáculo epistemológico se puede evidenciar en la siguiente figura:

> Los números que están a la misma distancia de cero y que tienen signos diferentes se llaman **opuestos**. El opuesto de un número entero **a** se representa como (**– a**).

Figura 52. Obstáculo: Identificación de símbolos literales con números positivos

Como se puede observar, el tratamiento que se le hace al número entero negativo es de caracterizarlo como un número opuesto representado como $-a$.

- Cambios en la simbología $+a = a$: Como su nombre lo indica este obstáculo está encaminado a que un número positivo puede expresarse de las dos maneras utilizando la simbología $+a$ ó a como una igualdad de expresiones, omitiendo como se enunció en el obstáculo anterior que un número a puede representar un número negativo, como lo indican las siguientes figuras:

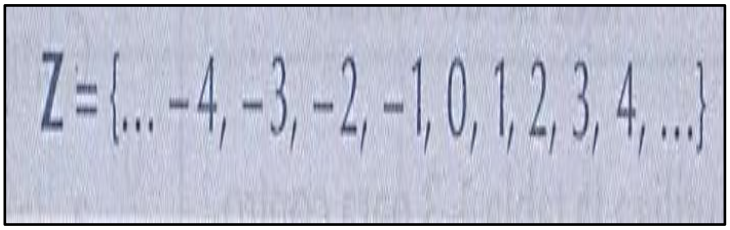


Figura 53. Conjunto de números enteros

En esta figura se puede ver la secuencia que se utiliza para determinar el conjunto de los números enteros, tomando a los enteros positivos como números sin signo $(+)$, sin embargo el obstáculo se presenta cuando más adelante se presentan los números positivos con signo, como se presenta en la siguiente figura:

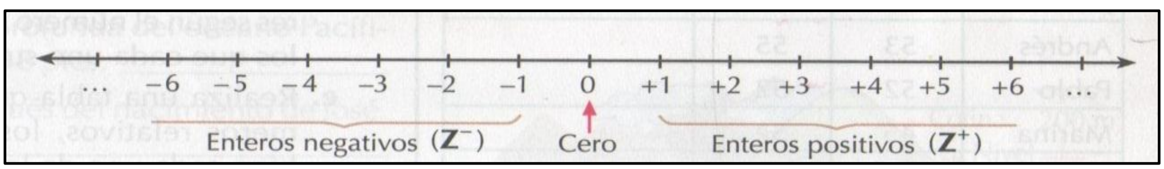


Figura 54. Obstáculo: Cambios en la simbología

Es evidente el cambio en la simbología que usa el libro de texto, primero establece que un número positivo se representa sin la necesidad de estar precedido del signo $(+)$, para más adelante exponerlo recurriendo al uso del signo. Según Bruno, A. (1997), el cambio en los símbolos o las reglas de los paréntesis son las causas de las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de los números negativos.

- El orden de los negativos es el mismo que el natural: La característica de este obstáculo radica en que los números positivos van aumentando a medida que se alejan del cero u origen, trasladar esta secuencia a los números negativos es un obstáculo que se genera al establecer que cuando se comparan número negativos sobre una recta horizontal, es mayor el entero que está más a la derecha, tal y como se presenta en la siguiente figura:

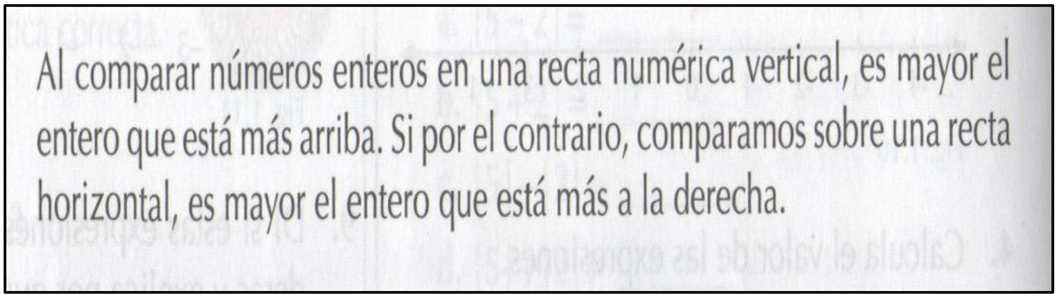

Al comparar números enteros en una recta numérica vertical, es mayor el entero que está más arriba. Si por el contrario, comparamos sobre una recta horizontal, es mayor el entero que está más a la derecha.

Figura 55. Obstáculo: El orden de los negativos es el mismo que el natural

Como se puede observar el libro presenta de manera confusa el orden de los enteros al indicar que el mayor entero es que está más a la derecha sin hacer distinción entre positivos y negativos, para una mejor claridad cognitiva a los estudiantes.

A pesar de que el libro de texto pertenece al año 2006, es importante resaltar que aún siguen presentes algunos obstáculos epistemológicos que tienden a generar fallas en la comprensión del concepto de número entero negativo. De esta manera, este tipo de estudios históricos y epistemológicos en la práctica docente son de gran importancia y ayuda al momento de presentar un concepto matemático.

A continuación se presenta la rejilla de análisis para el siguiente libro del año 2010, y posteriormente los obstáculos presentes en el mismo.

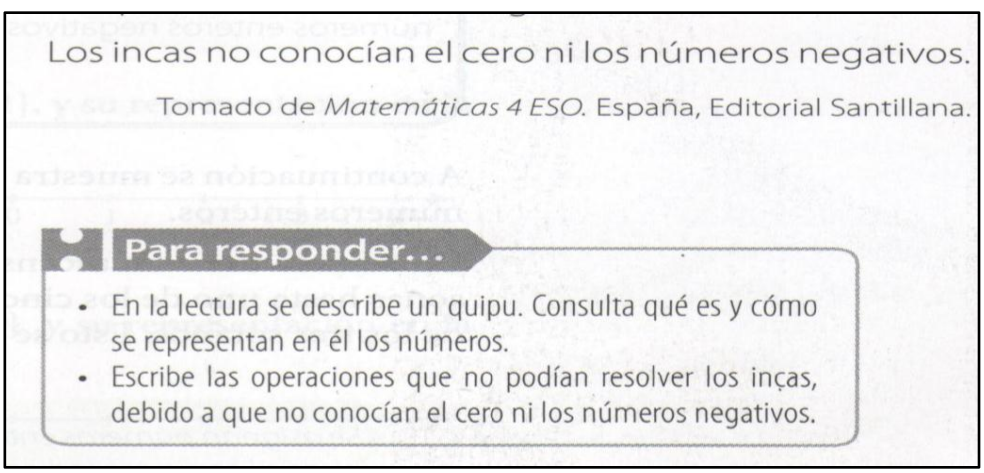
4.4.2 Aplicación rejilla de análisis para el texto: Hipertexto Matemáticas 7 (2010)

Recordemos que de este libro de texto se tomó la unidad I denominada *números enteros,* presente en la página 10. En esta misma unidad se encuentran las operaciones bajo el conjunto de números enteros, caso que no será objeto de análisis. A continuación se presenta la rejilla de aplicación para el libro y los obstáculos epistemológicos hallados.

Estructura conceptual-Procedimental	Sistemas de representación / Contextos numéricos	Verbal				Gráfico				Simbólico			
		Ca	Me	Or	Op	Ca	Me	Or	Op	Ca	Me	Or	Op
Hechos					x							x	
Conceptos					x			x				x	
Estructuras													
Destrezas				x	x								
Razonamientos								x					

Tabla 11. Aplicación rejilla de análisis para el texto: Hipertexto Matemáticas 7 (2010)

En este libro se presenta de manera introductoria un texto que relaciona la historia con el concepto de número entero negativo, para después el estudiante responder una serie de preguntas a partir del texto, el cual tiene que ver con el sistema de numeración de los incas, exactamente con los nudos del Quipu, que enfatiza en el desconocimiento de los incas del número cero y de lo negativos, tal y como se presenta en la siguiente figura:


Los incas no conocían el cero ni los números negativos.

Tomado de *Matemáticas 4 ESO*. España, Editorial Santillana.

Para responder...

- En la lectura se describe un quipu. Consulta qué es y cómo se representan en él los números.
- Escribe las operaciones que no podían resolver los inças, debido a que no conocían el cero ni los números negativos.

Figura 56. Números enteros en los incas

En primera instancia, se hace una contextualización del uso de los números negativos, como una ampliación del conjunto de los números naturales. Se definen en un contexto algebraico al no poder realizar dentro del conjunto de los naturales operaciones como $8 - 11$, aludiendo al concepto de número en un contexto operacional, presentando los hechos, es decir, los términos como los que hacen referencia a los números negativos como los naturales precedidos del signo menos. Además el libro define por separado a los números negativos, a los números positivos para concluir con el conjunto de los números enteros, como se puede evidenciar en la siguiente figura:

En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, no tiene sentido considerar restas tales como $8 - 11, 5 - 17, 23 - 39$; ya que, por ejemplo, la resta $8 - 11$ significaría querer quitar de un conjunto de ocho elementos un total de once elementos.

Por tal motivo, se hace necesaria la ampliación del conjunto de los números, a otro conjunto denominado **conjunto de números enteros**, que se simboliza $\mathbb{Z}$.

Figura 57. Números negativos en un contexto operacional

Más adelante, se presenta el concepto de número entero negativo como los números que se encuentran ubicados a la izquierda del cero en la recta numérica, utilizando evidentemente el sistema de representación gráfico, cuyo contexto numérico es de tipo ordinal, como lo indica la figura 58:

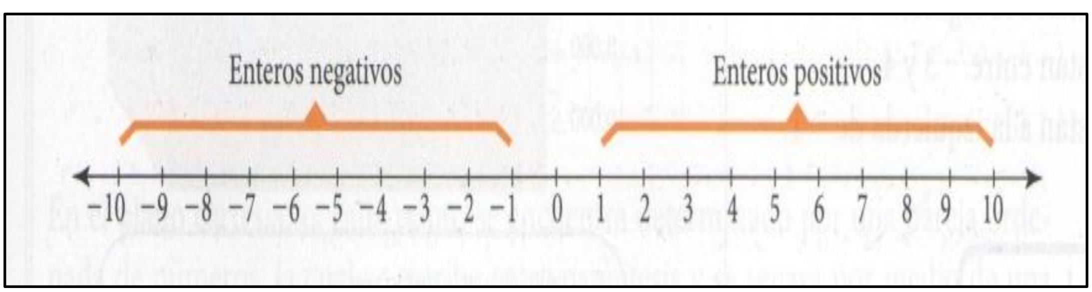


Figura 58. Representación gráfica de los enteros negativos

En la página 13 del libro de texto, se presentan a los números enteros como representación de puntos en el plano cartesiano, utilizando el sistema de representación gráfico para justificar que el signo de cada número, depende del cuadrante en el que se encuentre ubicado, como lo indica la siguiente figura

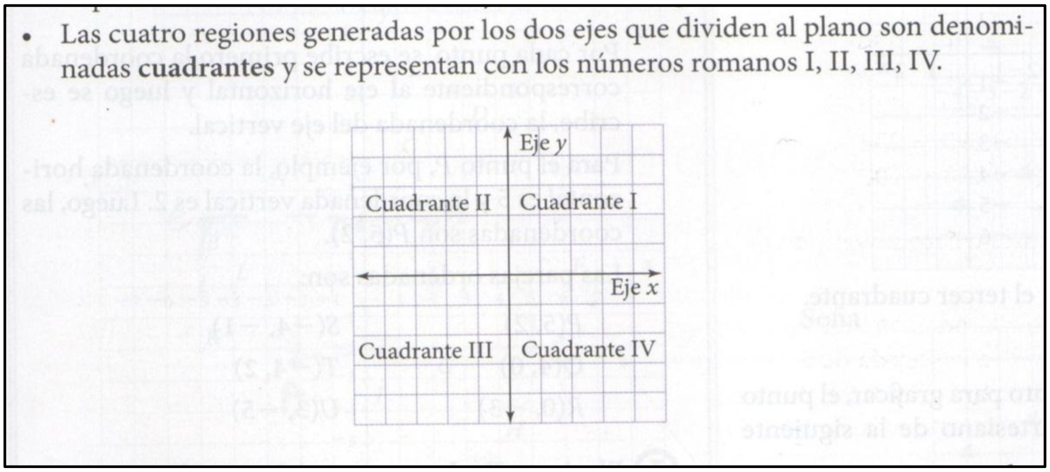


Figura 59. Números enteros en el plano cartesiano

El libro hace la explicación de cómo ubicar los puntos en el plano cartesiano, el cual se encuentra determinado por una pareja ordenada de números, distinguiendo a la abscisa como la localizada en el eje x y la ordenada sobre el eje y. Además enfatiza en que el signo de cada componente, en una pareja ordenada, depende del cuadrante en el que esté ubicado el punto correspondiente.

El siguiente tema es denominado *números opuestos,* en el que se determina que dos números enteros son opuestos si están a la misma distancia de cero y tienen diferente signo y lo hace mediante el uso de la recta numérica:

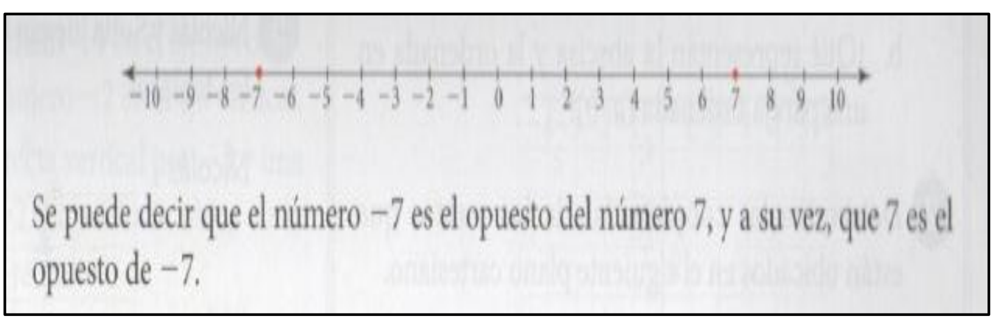


Figura 60. Números negativos como números opuestos

De igual manera, se presenta el valor absoluto de un número entero, como el correspondiente al número de unidades que separan a dicho número de cero, es decir, a la distancia del número respecto a cero.

El tema siguiente es denominado *orden en* $\mathbb{Z}$*,* el cual establece que al comparar dos números enteros a y b, se deben cumplir una y sólo una relación de orden, como se puede apreciar en la siguiente figura:

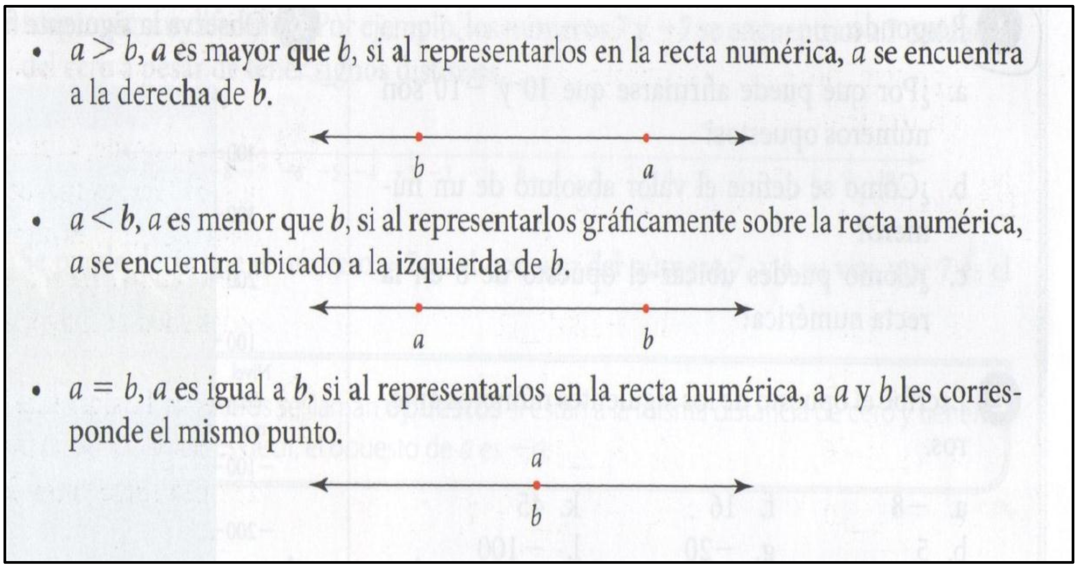


Figura 61. Relación de orden en los enteros

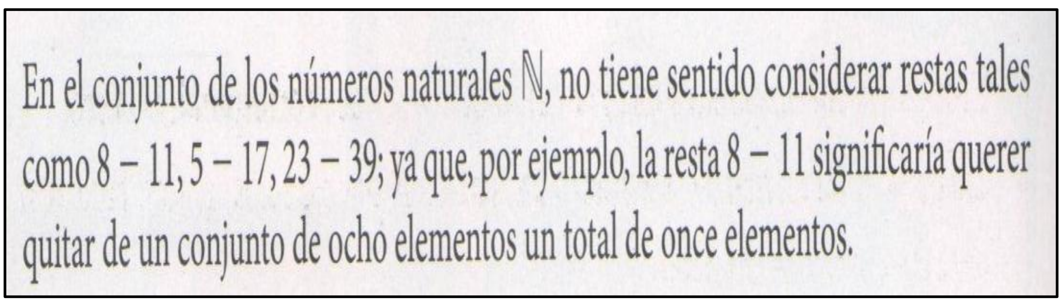
A partir de la figura, se puede establecer que se hace uso de la simbología $<, >, =$ que corresponden a los símbolos de menor que, mayor que o igual que para relacionar parejas de números enteros. De igual manera, el libro presenta un recuadro en el que justifica que para comparar pares dos números enteros se puede realizar dicha comparación a partir de la recta numérica, afirmando que el mayor entre dos enteros es el que se encuentra a la derecha del otro.

Es importante resaltar que el libro al terminar cada tema presenta una sesión denominada *actividades* en el que se exponen ejercicios y problemas que se enfocan en reforzar cada uno de los temas trabajados, para que el estudiante pueda interpretar, razonar, reflexionar y desarrollar procesos matemáticos. A continuación se presentarán los obstáculos en el libro de texto.

4.4.2.1 Obstáculos en el libro Hipertexto Matemáticas 7 (2010)

A partir del análisis se puede establecer que el libro no presenta aspectos de tipo formal del concepto de número entero negativo, lo relevante es el uso constante de la recta numérica para explicar la definición del concepto aludiendo al contexto numérico de tipo ordinal. De igual manera cuando se efectúa la explicación del concepto se lograron encontrar los siguientes obstáculos epistemológicos:

- La sustracción como disminución: Este obstáculo hace referencia a que los libros de texto asocian el signo menos $(-)$ de la sustracción con el signo menos de número entero negativo, presentando de manera formal la definición $a - b = c \; si \; y \; sólo \; si \; a = b + c$. En este sentido, el libro para introducir el conjunto de los números enteros negativos alude a un contexto algebraico para la resolución de ecuaciones lineales que en los naturales no tienen solución. La siguiente figura presenta el obstáculo mencionado:



En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, no tiene sentido considerar restas tales como $8 - 11$, $5 - 17$, $23 - 39$; ya que, por ejemplo, la resta $8 - 11$ significaría querer quitar de un conjunto de ocho elementos un total de once elementos.

Figura 62. Obstáculo: La sustracción como disminución

- Uso de modelos concretos: Los modelos concretos hacen referencia a las formas en que se puede contextualizar el concepto. En este sentido el modelo de ganancias y pérdidas justifican la estructura aditiva, pero se convertirá en obstáculo para la estructura multiplicativa. El libro presenta un ejemplo en el que requiere el modelo mencionado:

Ejemplos

Simbolizar las siguientes situaciones mediante números enteros:

a. Un submarino se encuentra a 1.500 m de profundidad.

Como es una profundidad, se expresa mediante un entero negativo así: −1.500.

b. La lombriz *Alvinella Pompejana* puede sobrevivir a una temperatura de 105 °C.

Como es una temperatura mayor que cero se expresa como: +105.

c. La pérdida generada al vender un producto en $ 16.000, si fue comprado en $ 19.500.

Como se perdió dinero, entonces, la cantidad se expresa como −3.500.

Figura 63. Obstáculo: Uso de modelos concretos

- Identificación de los símbolos literales con números positivos: Este obstáculo epistemológico se evidencia al presentar a los números negativos como los que están precedidos de un signo menos $(-)$, sin hacer explícito que un número a puede representar un número negativo o menor que cero:

Dos números enteros se llaman **opuestos** si están a la misma distancia de cero y tienen diferente signo. Es decir, el opuesto de a es $-a$.

Figura 64. Obstáculo: Símbolos literales con números positivos

Es evidente que este libro de texto presenta menos obstáculos con respecto al anterior, sin embargo, la semejanza radica en el obstáculo de identificar solo a los números positivos como a y a los enteros negativos como los precedidos del signo menos $-a$.

4.5 Comparación entre los libros analizados de la matemática actual

Los libros de texto de la matemática actual se referencian a modo de abreviatura de la siguiente manera:

- Libro 3: Conexiones Matemáticas 7 (2006)
- Libro 4: Hipertexto Matemáticas 7 (2010)

Es pertinente resaltar que ambos libros se ajustan a los Estándares de Competencias, pues presentan el tipo de pensamiento que se trabaja durante la unidad y los procesos, aunque son más evidentes en el libro 3, ya que se hacen explícitos y se argumenta cada uno aplicado al tema trabajado.

El libro 3 presenta problemas introductorios que contextualizan al estudiante con el tema que se va a trabajar de los números enteros, por su parte el libro 4 no hace este tipo de introducciones, aunque presenta aspectos históricos que relacionan aportes importantes del concepto.

El libro 3 presenta más ejemplos que facilitan la interpretación del concepto de número entero negativo, dándole significado en diferentes situaciones y en cada uno de los temas en los que se divide la unidad, para definir a los números enteros negativos. Mientras que el libro 4, el énfasis de contextualización lo hace en las actividades destinadas para que el estudiante las desarrolle y así mismo pueda interpretar la utilidad del concepto.

En cuanto a los obstáculos la semejanza radica en el obstáculo denominado la identificación de símbolos literales con números positivos, pues en ambos libros se puede ver que el número negativo es aquel número precedido del signo menos, es decir, $-a$, sin considerar por ejemplo que el número a puede representar un número menor que cero y no necesariamente un número positivo.

El sistema de representación gráfico se evidencia en el uso constante de la recta numérica para dar sentido y significado al conjunto de los números negativos, cuyo contexto numérico es de tipo ordinal, pues cada punto en la recta representa un número entero.

Ambos libros difieren en la forma de presentar el concepto de número negativo, en el tratamiento y el estatus que se le otorga. En los siguientes esquemas se presenta la manera secuencial que los libros de texto utilizan para la comprensión y ampliación del concepto:

Números negativos como relativos → Números enteros en la recta numérica → Números negativos como los menores que cero → Números negativos como coordenadas de puntos en en el plano cartesiano

Esquema 6. Secuencia del concepto de número entero negativo en el libro 3

Como se puede observar en el anterior esquema, el libro 3 no presenta de manera iinmediata el concepto, sino que además lo presenta de diferentes maneras y proporcionando los diferentes significados que el número entero puede representar, caso contrario ocurre con el libro 4 como lo veremos en el siguiente esquema:

Números enteros en la recta numérica → Números negativos como los menores que cero → Números negativos como representación de puntos en el plano cartesiano → Números negativos como números opuestos

Esquema 7. secuencialidad del número entero negativo en el libro 4

A partir del esquema 7 se puede ver el estatus que el libro le adjudica al número entero negativo, donde inicia presentando una definición formal en la recta numérica y culmina con los números negativos como números opuestos.

A continuación se presenta un cuadro comparativo que recoge de manera sintetizada los análisis de los libros analizados, es decir, los dos libros de la Reforma de la Matemática Moderna y los dos libros de la matemática actual, para establecer en ambos periodos las diferencias y/o semejanzas en la presentación del concepto.

4.6 Cuadro comparativo de las aplicaciones de la rejilla en ambos periodos

A partir de los respectivos análisis realizados en ambas reformas educativas, se puede ver el cambio en la presentación del concepto de número entero negativo, incluso el libro previo a la reforma de las matemáticas modernas, antes de entrar en vigencia el Decreto 080 de 1974 que legaliza la Matemática Moderna en Colombia, presenta grandes cambios, siendo el vinculo de transición de una época a otra. En primera instancia, se presenta una tabla que caracteriza el concepto de número entero negativo antes de la reforma en el libro de la SMSG, y luego otra tabla durante la Reforma de las Matemáticas Modernas y las matemáticas actuales, que sintetiza el significado que se se le asocia al número entero negativo:

Libro de la SMSG
Matemáticas Modernas para escuelas secundarias (1970)
• Sentidos opuestos • Desplazamientos en la recta numérica, para dar solución a operaciones • En la recta numérica los números enteros negativos son los menores que cero (números inventados) • Números negativos como números opuestos.

Tabla 12. Número negativo antes de la reforma de Matemática Moderna en Colombia

Antes de presentrar las variaciones en los libros de las Matemáticas Modernas y los de la matemática actual, recordemos la abreviatura que se considera para cada libro de texto:

- Libro 1: Serie Matemática Moderna II (1972). Ed. Norma
- Libro 2: Fundamentos de Matemática Superior Moderna (1977).Ed. Bedout
- Libro 3: Conexiones Matemáticas 7 (2006). Ed. Norma
- Libro 4: Hipertexto Matemáticas 7 (2010). Ed. Santillana.

Caracterización del concepto de número entero negativo			
Periodo			
Matemática Moderna		**Matemática actual**	
Libro 1 (1972)	**Libro 2 (1977)**	**Libro 3 (2006)**	**Libro 4 (2010)**
• Uso de la recta numérica para dar significado a los enteros negativos como los que se encuentran a la izquierda del cero. • Números negativos como los opuestos a los positivos.	• Números negativos en un contexto algebraico. • Números negativos como una sucesión ilímite.	• Números negativos como números relativos • Recta numérica para determinar los negativos como los que se encuentran a la izquierda del cero. • Números negativos como menores que cero. • Números negativos en el plano cartesiano.	• Uso de la recta numérica para indicar a los números negativos de manera ordinal, a la izquierda de cero. • Números negativos como los números menores que cero. • Números negativos como representación de puntos en el plano cartesiano. • Números negativos como números opuestos.

Tabla 13. Caracterización del número entero negativo en las reformas educativas

A partir de la tabla 12 y tabla 13, se puede determinar las diferentes formas en que se aborda el concepto de número entero negativo. En el libro de la SMSG el concepto es presentado como número inventado, partiendo de situaciones problema que involucran la utilidad del número en contextos de uso del termómetro y modelos concretos como ganancias y pérdidas. La recta numérica es utilizada, por un lado, para poder realizar desplazamientos y dar solución a operaciones que en los números naturales no tienen solución, haciendo referencia a un contexto algebraico que indica la necesidad del conjunto de números enteros negativos como respuesta a dichas operaciones, por el otro, para poder determinar a los números negativos como los menores que cero y como números opuestos a los positivos.

A diferencia de lo anterior, en el libro 1 , no se requiere la recta numérica para dar solución a operaciones en los enteros, sino que es utilizada para indicar a los negativos como los que se encuentran a la izquierda del cero y como números opuestos. Lo interesante es que en el libro 2, al igual que en el de la SMSG el número negativo es presentado en un contexto algebraico, es decir, que posibilite la opción de dar solución a operaciones que en los naturales no son posibles.

El libro 2 sólo presenta dos significados de los enteros negativos, introduciéndolo en un contexto algebraico y como una sucesión ilímite, caso que no se expone en ningún otro de los libros. La contextualización es poca y podría decirse que es netamente matemática, es decir, no relaciona la utilidad del concepto con aspectos de la vida.

Las variaciones entre los libros de la Matemática Moderna y los libros de la matemática actual, parten del hecho de que es estos últimos hacen más énfasis en la contextualización del concepto de entero negativo, y las formas de dar significado son más amplias que los anteriores textos, pues presentan de manera semejante el concepto aunque en un orden diferente, permitiendo dar un panorama de utilidad de los enteros negativos en el contexto real de los estudiantes.

El libro 3 inicia con los números relativos, mientras que el libro 4, presenta de manera inmediata al conjunto de los enteros negativos en la recta numérica para otorgarles el signicado de menores que cero y los ubicados a la izquierda del cero. A diferencia de lo anterior, ambos libros utilizan el plano cartesiano para justificar a los números enteros como representación de puntos de parejas ordenas.

Es evidente el sistema de representación gráfico en todos los libros analizados, es decir, la recta numérica como medio para poder determinar al entero negativo en un contexto numérico de tipo ordinal, sea para otorgarle el significado como los menores que cero, como números opuestos o incluso para poder establecer solución a operaciones desde la solución de ecuaciones lineales en un contexto algebraico.

A continuación se presenta una tabla q ue sintetiza los obstáculos presentes en los libros de la matemática moderna y los libros de la matemática actual, para lograr encontrar semenjanzas u obstáculos repetitivos en los textos, o por el contrario diferencias de lo hallado:

Obstáculos en los libros analizados			
Periodo			
Matemática Moderna		**Matemática actual**	
Libro 1 (1972)	**Libro 2 (1977)**	**Libro 3 (2006)**	**Libro 4 (2010)**
• Uso de modelos concretos • Identificación de los símbolos literales con números positivos • La aritmética práctica. Lo real	• La sustracción como disminución • Identificación de los símbolos literales con números positivos • Lo formal como	• Modelo de ganancias y pérdidas • Identificación de los símbolos literales con números positivos • Cambio en la	• La sustracción como disminución • Uso de modelos concretos • Identificación de los

como obstáculo.	obstáculo • El orden de los negativos es el mismo que el natural.	simbología $+a = a$ • El orden de los negativos es el mismo que el natural.	símbolos literales con números positivos

Tabla 14. Síntesis de los obstáculos en los libros de las reformas educativas

De acuerdo con la tabla anterior, se pueden caracterizar los obstáculos considerando la época y determinar la semejanza y diferencia entre cada uno de los libros de textos. Analizando los obstáculos presentes en los libros de la matemática moderna y los de la actual, se puede establecer que el obstáculo: *Identificación de los símbolos literales con números positivos,* es el común en ambos periodos. Esto indica que los libros van muy de la mano con la manera de interepretar Euler a los números negativos, simbolizándolos con una letra precedida del signo $(-)$. Asi $-x$ representa un número negativo y x representa un número positivo, sin tener en consideración que x puede representar un número negativo y $-x$ un número positivo, idea que cuesta ser aceptada por parte de los estudiantes, y por ende generador de obstáculo en el aprendizaje.

El libro 2 de la matemática moderna y el libro 3 de la actual se cacraterizan por compartir el obstáculo: *El orden de los negativos es el mismo que el de los números naturales.* Este obstáculo indica que trasladar la secuencia de que los números positivos van aumentando a medida que se alejan del cero, a los números negativos es un obstáculo que más adelante puede generar dificultades en el aprendizaje cuando este puesta en acción, que por ejemplo, el cuadrado de una cantidad menor es mayor que el cuadrado de una cantidad mayor, colisionando con la idea de que el número se relaciona con la cantidad.

El libro 2 y el libro 4, tienen en común el obstáculo: *La sustracción como disminución,* obstáculo que indica que el signo $(-)$ del número entero negativo, está asociado con la sustracción, identificada con la acción de quitar.

Dentro del periodo de la matemática actual se puede evidenciar que los libros 3 y 4 presentan semejanza en el obstáculo: *Modelo de ganancias y pérdidas y uso de modelos concretos*, ambos están relacionados puesto que son modelos que están siendo utilizados con el objeto de contextualizar la utilidad y la relación de los enteros negativos en situaciones de la vida, aunque ambos modelos justifican la estructura aditiva, pero son generadores de obstáculos en el sentido de que no justifican la estructutura multiplicativa.

Es importante resaltar que el libro 4 presenta menor cantidad de obstáculos, lo que podría considerarse como un índice de que al menos se puede, evitar de manera parcial, obstáculos en el aprendizaje de los enteros negativos. Sin embargo, al ser periodos tan amplios, desde la Reforma de la Matemática Moderna hasta la actual, se puede pensar que la falta conocimiento acerca de los obstáculos históricos y epistemológicos asociados al concepto de número entero, no se están considerando a pesar de ser un concepto que sigue siendo objeto de discusión.

Para terminar, en el siguiente capítulo se presentan las conclusiones finales del trabajo que trae aportes a la Educación Matemática acerca de considerar este tipo de estudios históricos y epistemológicos de un concepto en matemáticas para el momento de trabajarlo o enseñarlo en el aula de clase.

5. CONCLUSIONES GENERALES DEL TRABAJO

- A partir de este trabajo se puede determinar que los estudios históricos y epistemológicos de conceptos matemáticos, ofrece al campo de la Educación Matemática aportes significativos, pues un docente al tener conocimiento acerca de la construcción teórica y formalista de un concepto genera mejoras en la práctica educativa, ampliando el panorama al docente de prever las posibles dificultades a las que el estudiante se puede enfrentar cuando esté aprediendo un nuevo conocimiento.
- Los libros de texto son una herramienta de gran utilidad tanto para el docente como para el estudiante, pero es el docente quien debe jugar un papel activo en la selección, pues no debe limitarse a lo que presenta el texto, por el contrario, debe generar estrategias de planeación para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, y son los aspectos históricos y epistemológicos los que son de gran ayuda para dicha tarea.
- El concepto de número ha estado ligado con aspectos de tipo de medición y de cantidad. La historia indica que el número y su utilización surge en primera instancia como ordinal, pues los antepasados necesitaban dar un orden de jerarquía en sus ceremonias, luego aparece la necesidad de contar o medir magnitudes para representar conjuntos de elementos o particiones de tierra, sin embargo esta idea colisiona con la aparición del número negativo.
- Son los chinos a quienes se les atribuye la idea intuitiva del uso de los números negativos, pues involucran no solo representaciones positivas de los números, sino que establecen una manera de atribuir significado a los negativos, a través de una barra diagonal que hacía referencia a la negatividad, utilizado en contextos de compras o ventas, logrando articular el objeto matemático con la realidad cotidiana.
- En un contexto algebraico los números negativos aparecen como solución a ecuaciones, de ahí el nombre de negatividad, puesto que para muchos matemáticos sólo se admitían raíces positivas de las ecuaciones, las

negativas sólo expresaban valores negados y no tendrían significado, además de no lograr encontrar un vínculo directo con la realidad física.

- En la indagación histórica, se pudo observar algunos obstáculos epistemológicos que surgieron a partir de de la evolución histórica del número entero negativo, dichos obstáculos giran, por un lado ,en torno a las necesidades de su uso en la resolución de ecuaciones lineales y, por el otro a la ambigüedad de considerar cantidades que debían unificarse en la recta real, ya que pasar de un cero absoluto a un cero que significaba ausencia de cantidad de magnitud generó en los matemáticos grandes reacciones, al no considerar cantidades que fueran menos que nada.
- Este trabajo permite tomar conciencia acerca de lo que se enseña y cómo se enseña el concepto de número entero negativo. La enseñanza y aprendizaje de los números enteros negativos bajo la perspectiva de los obstáculos históricos y epistemológicos, conlleva a evitar conflictos en la comprensión del concepto, pues en muchas ocasiones los números negativos se han visto a un formalismo vacío que no genera apropiación y utilidad dentro de la vida cotidiana.
- Es importante como futuro docente tener conocimiento de la construcción formal de los números enteros, pues no se trata de impartir dentro de las clases definiciones abstractas y sin sentido, sino encontrar en ellas apropiación de relaciones que pueden determinar vías de acceso para enseñar el conjunto de los números enteros negativos.
- En los libros de la Reforma de la Matemática Moderna no se hace una contextualización profunda del concepto de número entero negativo, presentándolo en la recta numérica como los menores que cero y como una sucesión ilímite,además como anillo conmutativo y clases residuales, elementos que son propios del álgebra y que determinan las características propias de la Reforma, cuyo eje central era la estructura algebraica, la topológica y la de orden.
- El uso del termómetro y el modelo de ganancias y pérdidas, en la Reforma de la Matemática Moderna, es la única asociación que relaciona el concepto

de número entero negativo con el contexto real, que también es común en los dos libros de la matemática actual, modelos concretos generadores de obstáculos para su comprensión, pues justifican la estructura aditiva pero no la multiplicativa del conjunto numérico.

- El obstáculo *identificación de los símbolos literales con números positivos* es el obstáculo que es común en los libros analizados de las dos reformas educativas,al establecer que los números negativos se simbolizan con una letra precedida del signo $(-)$. En este caso $-x$ representa un número negativo y x representa un número positivo, sin considerar que x , puede, incluso representar un número negativo. Es tarea del docente prever este tipo de obstáculos, pues es un obstáculo vigente al que hay que evitar de manera parcial.
- Se logra ver un avance significativo en cuanto a la caracterización del número entero negativo, pues en la Reforma de la Matemática Moderna sólo se presenta el concepto de manera algebraica en la solución de ecuaciones lineales, como los números opuestos a los positivos y como los números que se encuentran a la izquierda del cero. Mientras que en los libros de la Matemática actual, se abandona el contexto algebraico y la presentación del concepto alude al tratamiento de una secuencialidad abordando los números negativos como números relativos, como los números menores que cero, como números opuestos y como la representación de puntos en el plano cartesiano, permitiendo ampliar una contextualización para la enseñanza y aprendizaje.
- Es evidente la diferencia que se presenta en la definición del número entero negativo en la Reforma de la Matemática Moderna, pues los dos libros a pesar de pertenecer al periodo de la reforma, introducen el concepto de manera muy distinta. En el libro de 1972 se presenta primero los números negativos en la recta numérica y posteriormente, como los números opuestos a los enteros positivos. Mientras que en el libro de 1977, surge el contexto algebraico para incorporar a los números negativos a partir de la resolución de ecuaciones lineales, para después presentarlos como una

sucesión ilímite y clases residuales, y todo se debe a la implementación del Decreto 080 de 1974 que legaliza la Matemática Moderna en Colombia, siendo el puente de corte entre el antes y el después de la reforma.

- Un aspecto a destacar es la formación de los autores de los libros, y su influencia en la manera de presentar las definiciones del concepto. Es relevante que en el periodo de la Reforma de la Matemática Moderna, en su mayoría, los autores son matemáticos e ingenieros, mientras que en los libros de la matemática actual los autores son todos licenciados, generando una mirada amplia desde lo matemático, hasta lo pedagógico y didáctico.
- Este trabajo se inscribe en la línea de Historia de las Matemáticas, permitiendo lograr una interdisciplinariedad entre lo histórico, epistemológico, matemático y didáctico, todo ello ligado a la rejilla de análisis propuesta para el desarrollo de este estudio, y asimismo logrando la articulación de todos los elementos mencionados.
- Se destaca la importancia de la rejilla de análisis que fue rediseñada de acuerdo a la propuesta de Rico, et al (2008), ya que permitió lograr la integración de todos los aspectos que giran en torno al concepto de número entero negativo en este trabajo, evidenciar y sintetizar los diferentes obstáculos epistemológicos, aspectos de tipo netamente matemático, los sistemas de representación o formas de hacer presente el objeto matemático y la conceptualización de número que se tiene en consideración en los libros de texto analizados.
- Se deja como objeto de indagación la presentación del concepto en el mismo periodo pero pertenecientes a la misma editorial, para analizar los cambios en la definición y los obstáculos asociados, de manera que permita determinar si son o no tenidos en cuenta los estudios históricos y epistemológicos al momento de diseñar los contenidos en los libros de texto.
- Los periodos analizados fueron el de la Reforma de la Matemática Moderna comprendido entre los años 1960-1980 y la Matemática actual en el periodo 2003-2013. Como futuro trabajo, queda pendiente investigar acerca de lo que sucedió durante la renovación curricular en el periodo entre 1980 y

2003, para poder establecer el cambio generado en la transición de una reforma a la siguiente.

- A modo personal este trabajo es un gran aporte para el campo de la Educación Matemática, pues es una muestra de que la labor docente no sólo se enfoca en impartir el conocimiento, se debe seguir analizando y estudiando los diferentes aspectos que circundan en conceptos matemáticos, en especial los ligados a la evolución histórica y epistemológica, que sirvan como medio para generar herramientas en búsqueda de mejorar la práctica educativa, y asi mismo facilitar la comprensión de las matemáticas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anacona, M. (2003). *La historia de las matemáticas en la Educación Matemática*. *EMA, 8* (1), 30-46.

Anne, B. (2002). Algunos elementos de la historia de los números negativos. Recuperado del sitio web: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/otros_idiomas/Espanol/Penelope/Boye_negativos_es.pdf

Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E., & Sánchez, G. (2009). *El texto escolar: conceptualización y características*. Análisis de textos escolares de matemáticas.

Arboleda, L.C. & Castrillón, G. (2003). Educación matemática, pedagogía y didáctica. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2*(1) ,5-27.

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática.* Universidad de Granada. Pp. 145-155

Artigue, M (1990). epistémologie et didactique. *reserches en didactique des mathématiques. 10*(23). Traducido por Espitia Ma. F. Recuperado del sitio web: http://www.grupocalculo.galeon.com/articulo2.doc

Blanco, H. (2009). *Del número a los sistemas de numeración*. Trabajo de grado – Maestría en Educación. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Bruno, A. (1997). *La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado.* Recuperado el 4 de septiembre de 2013, del sitio web: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2001_04_2_05.pdf

Cid, E. (2000). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Recuperado el 4 de Septiembre de 2013, del sitio web: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Frediani E. & Tenorio Á. (2004*). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca.* Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, España. Lecturas Matemáticas *Volumen* 25*,* Pp. 159 -190

Freudenthal, H. (1983): *didactical phenomenology of mathematical structures.* dordrecht: reidel.

Gallardo, A., & Hernández, A. (2007). *Historia versus enseñanza: los números negativos*. Cinvestav-IPN, México. Recuperado el día 10 de octubre de 2013 del sitio web: www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig2/**gallardo**.pdf

Garcia, G. (1996). Reformas en la enseñanza de las matemáticas escolares: perspectivas para su desarrollo. *EMA, 1*(3), 195-206

Gómez, Al. (2013). *Matemática moderna en el bachillerato colombiano*. Recuperado el día 3 de Octubre de 2013 del sitio web: http://www.cibem.org/extensos/230_1375234739_cb_cibem.doc.

Gómez, A. (2010). *La escolarización de la reforma de las matemáticas modernas en la educación media en Colombia en torno a los conceptos de relación, función y conjunto durante el período 1960-1985*. Ponencia presentada en el 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa - ASOCOLME 2010. Recuperado el 15 de noviembre de 2013 del sitio web: http://funes.uniandes.edu.co/1138/

Gómez, A. & Sánchez, A. (2008). *Los conjuntos numéricos: algunas reflexiones desde el marco curricular y conceptual.* Trabajo de grado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Gonzalez P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, (45), 17-27.

González, J. L., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortíz, A., Ortíz, A., Sanz, E. & Vargas-Machuca, I. (1999). Números enteros. *Matemáticas: cultura y aprendizaje.* pp. 27-157. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Hernández, M. (2010). Evolución histórica del concepto de Número. *Autodidacta, 1*(1), 28-47.

Marín, M. & Ospina, G. (1998). *Acercamiento formal a los números enteros*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Magaña, P. (s.f) *Origen de los números*. Recuperado el día 10 de octubre de 2013 del sitio web: http://scholar.google.es/scholar?q=related:L8REsfN8HhoJ:scholar.google.com/&hl=es&as_sdt=0,5

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie Lineamientos Curriculares. Matemáticas.* Bogotá.

Monterrubio, M.C. & Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA, 5*(3), 105-127.

Ortega, N. & Castillo V. (2012). *Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica.* Tesis de grado de la Licenciatura en la Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ortiz, G (2010). Borrador de una propuesta para un curso de teroría de conjuntos y sistemas numéricos. Departamento de matemáticas. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Perelman, Y. (1959). *Aritmética recreativa*. Recuperado del sitio web: http://www.perueduca.edu.pe/c/document_library/get_file?p_l_id=42501&folderId=119405&name=DLFE-5010.pdf

Prendes, M.P. (2001). *Evaluación de manuales escolares*. *Pixel,Bit: Revista de medios y educación*, (16). Recuperado el 10 de septiembre de 2013 del sitio web: http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n16/n16art/art167.htm

Prendes, M. P. & Solano, I. M. (2004). *Herramienta de evaluación de material didáctico impreso.* Grupo de Investigación de Tecnología Educativa (G.I.T.E.). Universidad de Murcia, España.

Recalde, L. (2005) *Notas del curso de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle, Cali-Colombia

Rico, L., Marín, A., Lupiañez, J. L. & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma,* 58, 7-23.

Ruiz, A & Barrantes, H (2011). En los orígenes del CIAEM. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*, 13-46.

Sánchez, C (2001). 50 años de matemática moderna en Colombia. *Boletín de Matemáticas, 8*(2), 3-28.

Soto, D.(2012). *La independencia americana: textos e imaginarios escolares en Colombia.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Recuperado el 6 de octubre de 2013 del sitio web:

http://hcentroamerica.fcs.ucr.ac.cr/Contenidos/hca/cong/mesas/x_congreso/ensenanza/independencia-colombia.pdf

Valencia, O. (2010). *Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares.* Tesis de grado de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Vasco, C. (2002). *Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas.* Conferencia inaugural de la Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas. Universidad del Valle, Santiago de Cali.